

Jeanniard Sébastien

Lemaître Guillaume

TP n°1 : Ondes hydrodynamiques de surface

## 2 Génération de trains d'ondes :

### 2.1 Montage :

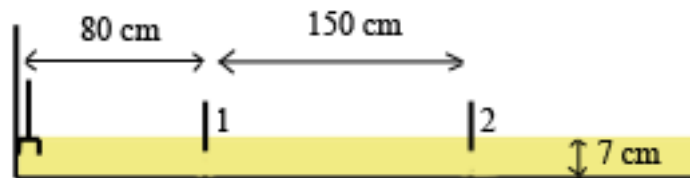


Figure 1 : Montage pour la 1<sup>ère</sup> expérience

### 2.2 Expérience et exploitation :

Nous générons un signal de 2 Hz d'amplitude 5 mm constitué de 4 périodes. Les oscillations relevées sont les suivantes :

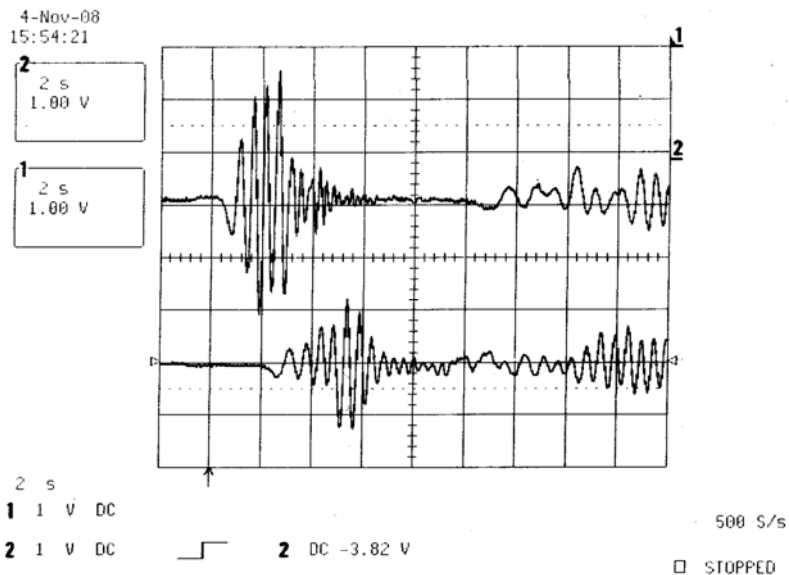


Figure 2 : Signal perçu par la sonde 1 et la sonde 2

Nous pouvons mesurer la largeur du signal à la première sonde sur ce chronogramme :

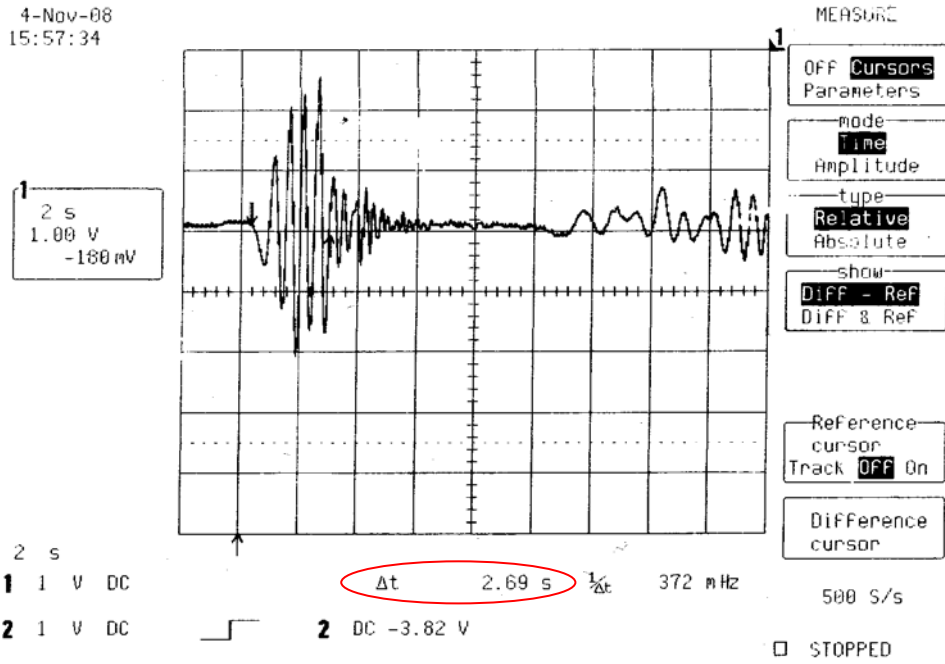


Figure 3 : Signal perçu à la sonde 1 à 80 cm du début du canal

La largeur du signal à la première sonde est :

$$Ls_1 = 2,69 \text{ s}$$

Nous pouvons mesurer la largeur du signal à la seconde sonde sur ce chronogramme :

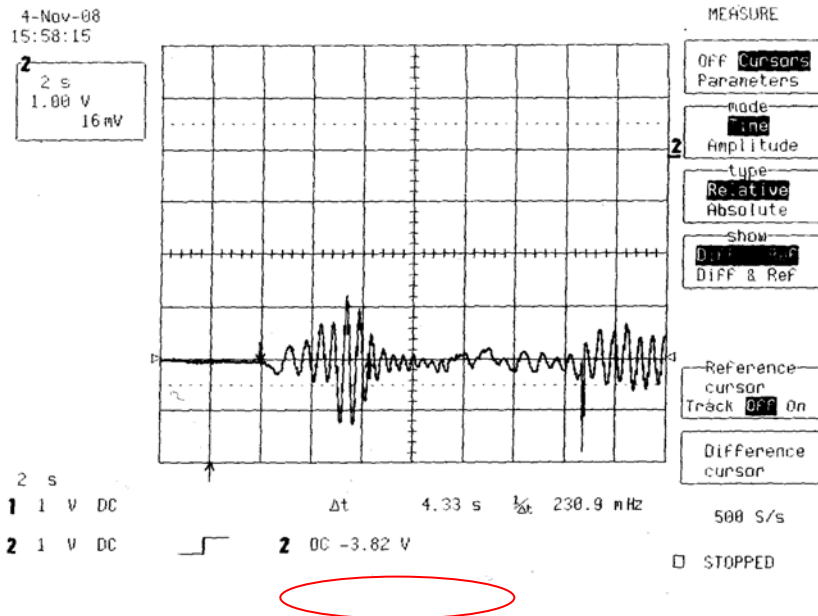


Figure 4 : Signal perçu à la sonde 2 à 150 cm de la première sonde

La largeur du signal à la seconde sonde est :

$$Ls_2 = 4,33 \text{ s}$$

Nous nous apercevons que le signal à la première sonde est plus compact que le même signal à la seconde sonde. Nous pouvons donc conclure que le signal s'étale de plus en plus au fil du temps. Ceci est le phénomène de dispersion.

La vitesse de phase d'une onde est :

$$v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{w}{k}$$

Ceci revient à calculer le rapport du déplacement du début du signal entre les deux sondes par le temps que met le début du signal pour aller de la première sonde à la seconde. A partir de ce chronogramme Nous pouvons en déduire la vitesse de phase.

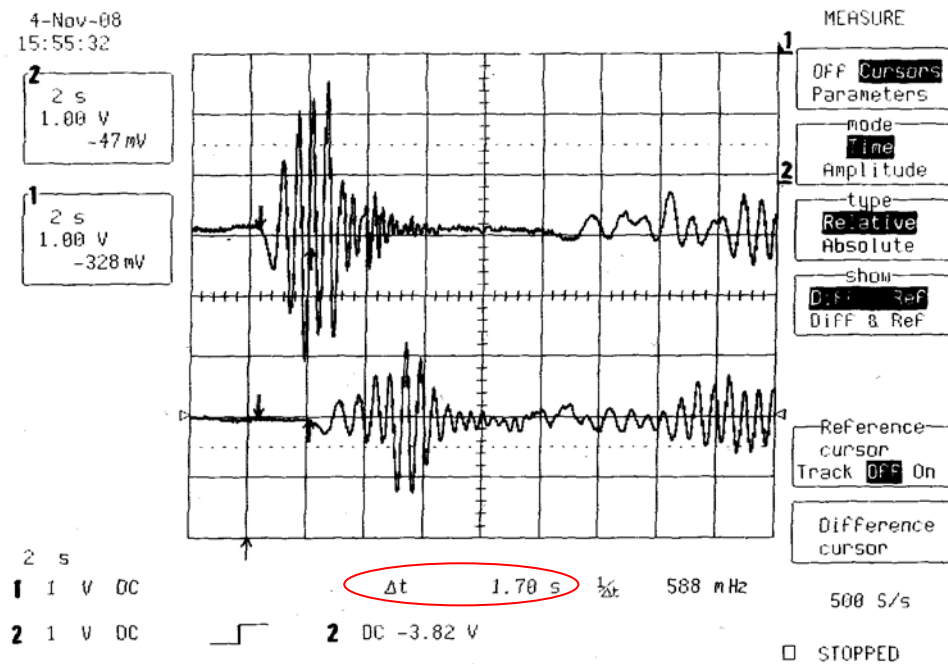


Figure 5 : Chronogramme permettant de calculer la vitesse de phase

Nous en déduisons du chronogramme :

$$v_\phi = \frac{1,5}{1,7} = 0,882 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 88,2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

On peut ajouter que la vitesse de phase ne prend pas en compte le phénomène de dispersion.

A contrario, la vitesse de groupe prend en compte le phénomène de dispersion si nous sommes dans un milieu dispersif. Cette vitesse revient au rapport de la pulsation sur le nombre d'onde :

$$v_g = \frac{dw}{dk} = v_\phi + k \cdot \frac{dv_\phi}{dk}$$

On peut noter que lorsque le milieu est non dispersif, la vitesse de phase et de gain sont égales.

Dans notre cas, ceci revient à calculer le rapport du déplacement du milieu du signal entre les deux sondes par le temps que met le milieu du signal pour aller de la première sonde à la seconde. A partir de ce chronogramme on peut en déduire la vitesse de phase.

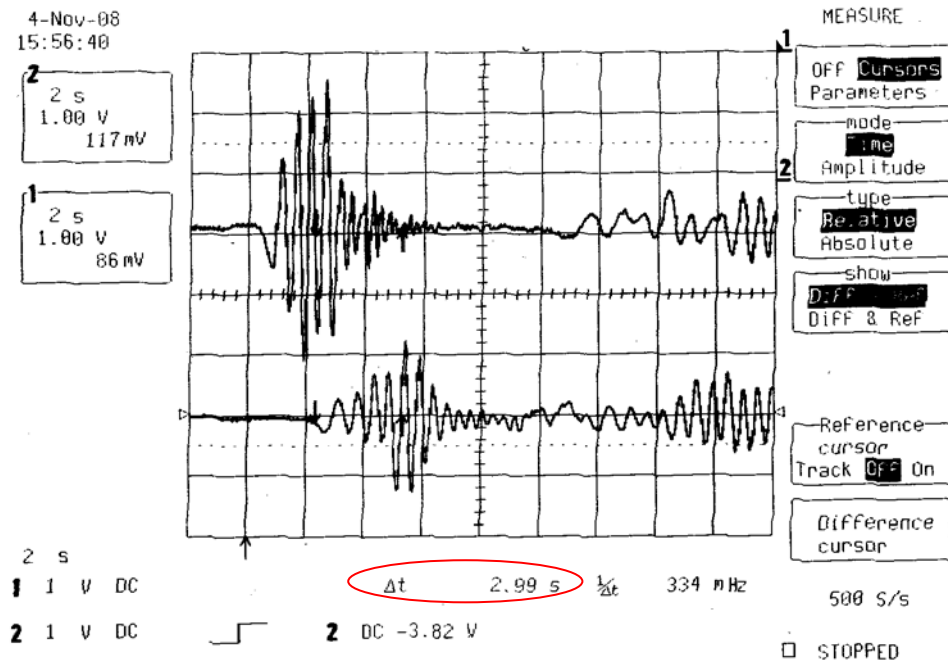


Figure 6 : Chronogramme permettant de calculer la vitesse de groupe

On en déduit du chronogramme :

$$v_g = \frac{1,5}{2,99} = 0,502 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 50,2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

La vitesse de phase et la vitesse ne sont pas les mêmes. Ainsi nous pouvons en déduire que le milieu est dispersif.

Nous avons tracé le spectre de Fourier (FFT) du signal à la première sonde et nous obtenons :

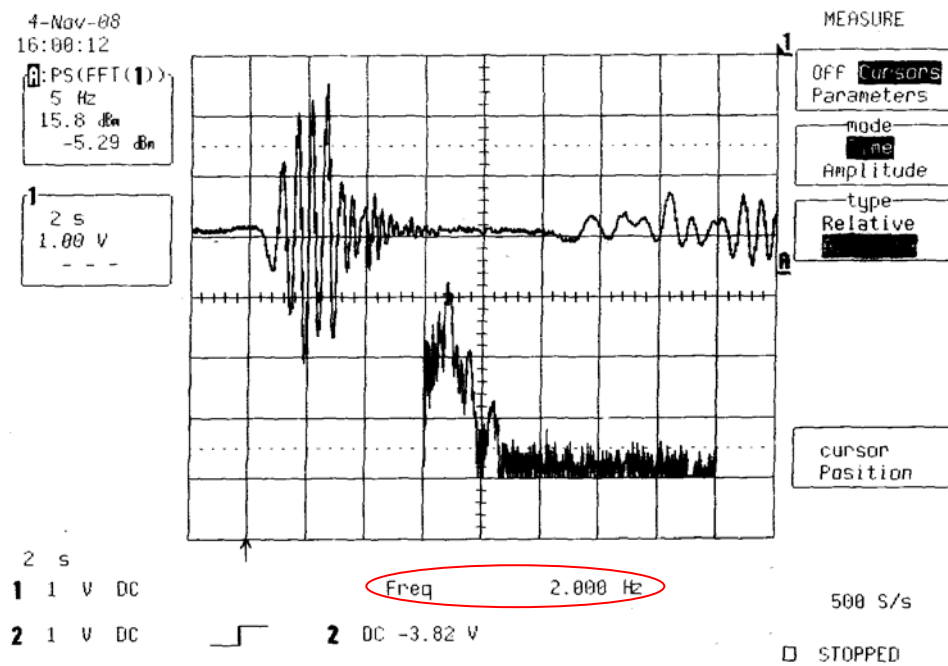


Figure 7 : Spectre de Fourier FFT à la première sonde (signal du bas)

La fréquence la plus présente dans l'onde et qui est représenté par un pic est :

$$f = 2 \text{ Hz}$$

La largeur de la bande est :

$$f + f_0 = 2,5 \text{ Hz}$$

Et

$$f - f_0 = 1,5 \text{ Hz}$$

Nous pouvons remarquer la présence de certaines harmoniques à 0,5 Hz, 1 Hz, 3 Hz. Ensuite toutes les fréquences supérieures sont négligeables.

### 3 Régime harmonique et courbe de dispersion :

#### 3.1 Montage :

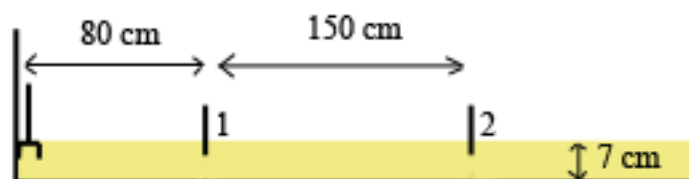


Figure 8 : Montage pour la seconde expérience

### 3.2 Niveau temporel :

Nous générons un signal de 10 périodes à une fréquence de 2 Hz. Nous obtenons le chronogramme suivant :

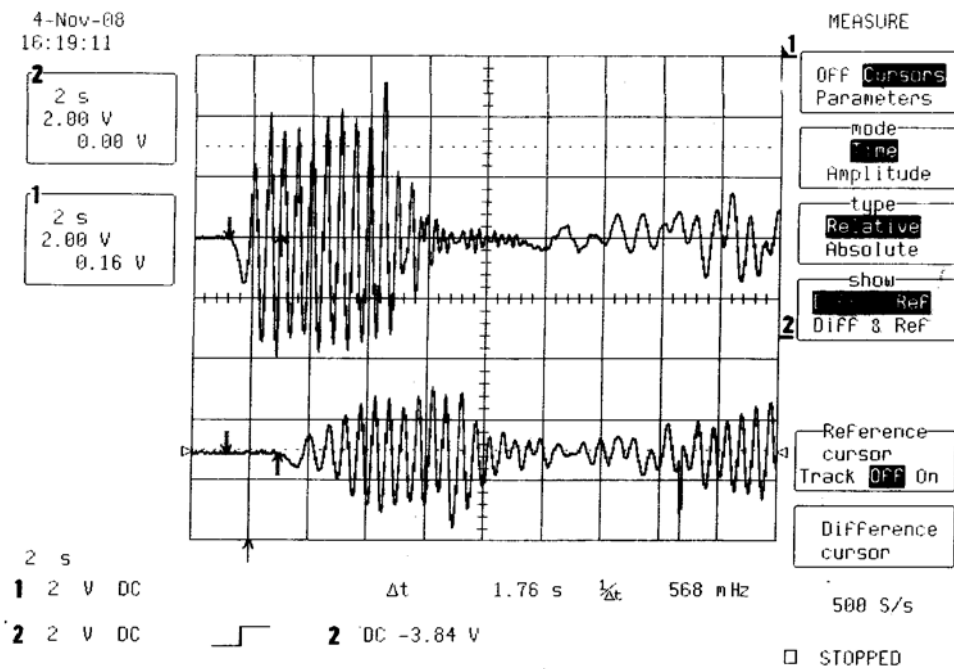


Figure 9 : Signal perçu à la première et seconde sonde

Dans le chronogramme suivant, la deuxième courbe correspondant au spectre de Fourier (FFT), nous pouvons en déduire que la fréquence principale de l'onde générée est 2 Hz.

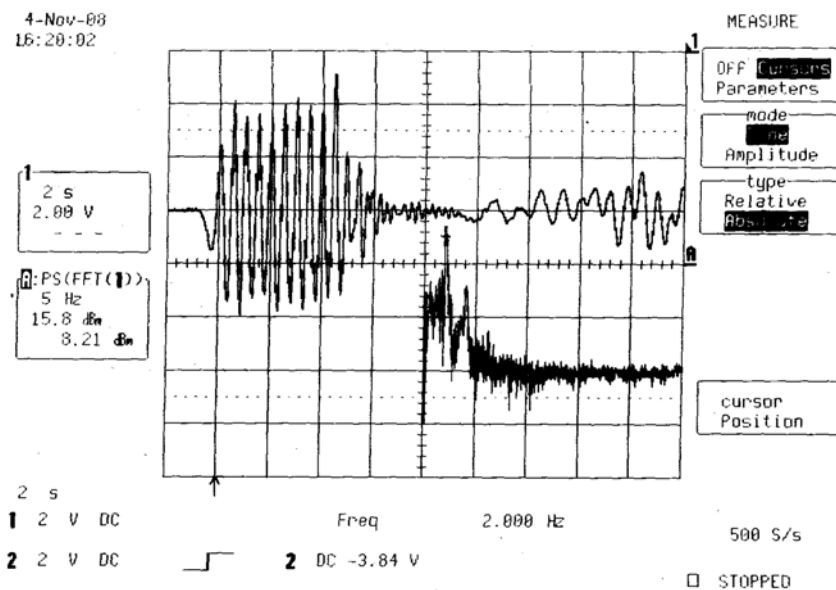


Figure 10 : Spectre de Fourier (second signal) du signal perçu à la première sonde

Nous pouvons alors en déduire la pulsation  $\omega$  :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2 = 12,57 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pour calculer la vitesse de propagation, nous allons calculer la vitesse de phase à partir du chronogramme suivant :

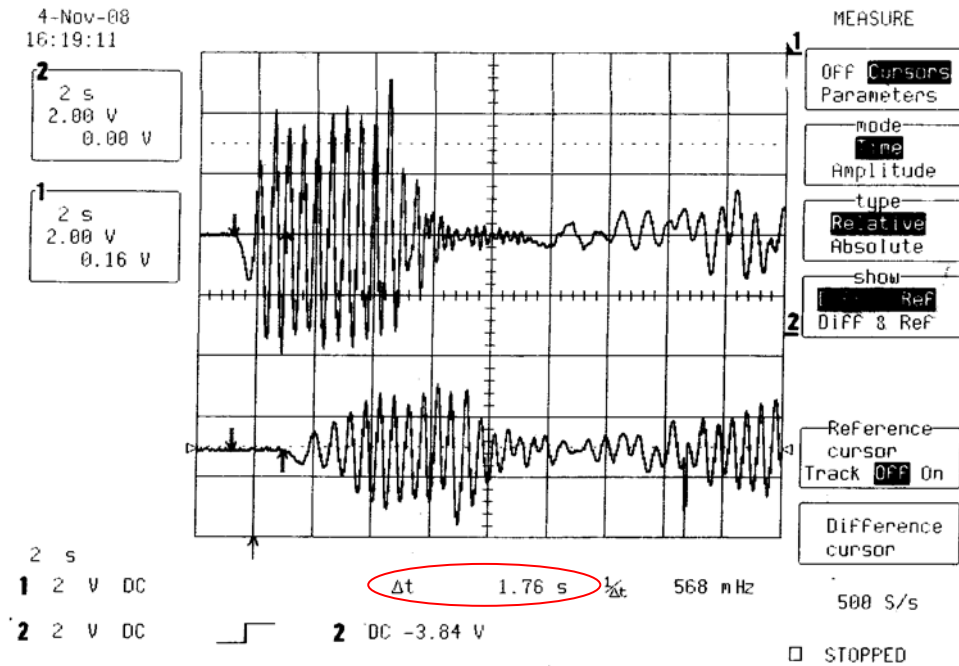


Figure 11 : Chronogramme permettant de calculer la vitesse de propagation

Nous obtenons alors :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1,5}{1,76} = 0,852 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 85,2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Nous recommençons à une fréquence de 2,5 Hz. Nous obtenons le chronogramme suivant :

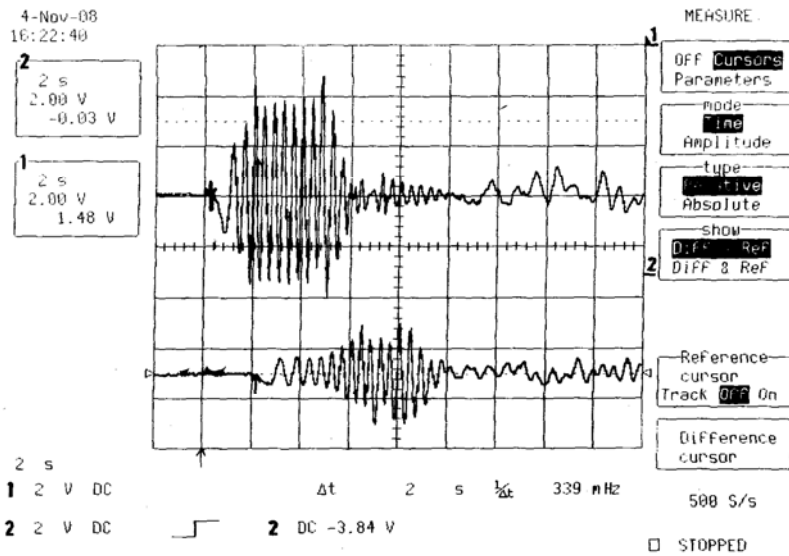


Figure 12 : Chronogramme du signal à la première et seconde sonde

Dans le chronogramme suivant, la deuxième courbe correspondant au spectre de Fourier (FFT), nous pouvons en déduire que la fréquence principale de l'onde générée est 2,5 Hz.

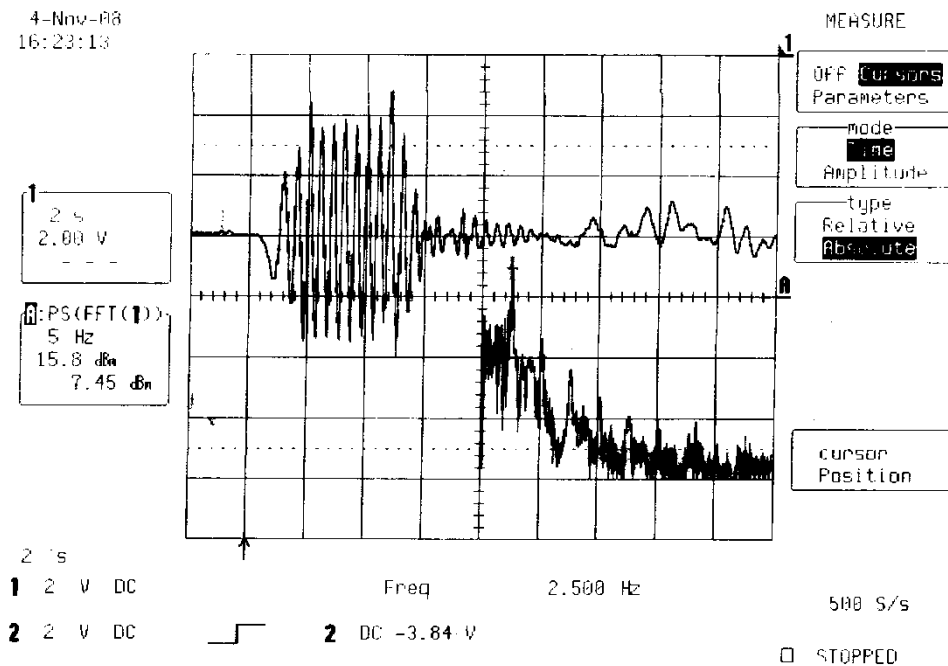


Figure 13 : Spectre de Fourier (signal en bas) du signal perçu à la première sonde

Nous pouvons alors en déduire la pulsation  $\omega$  :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2,5 = 15,71 \text{ rad.s}^{-1}$$



Pour calculer la vitesse de propagation, nous allons calculer la vitesse de phase à partir du chronogramme suivant :

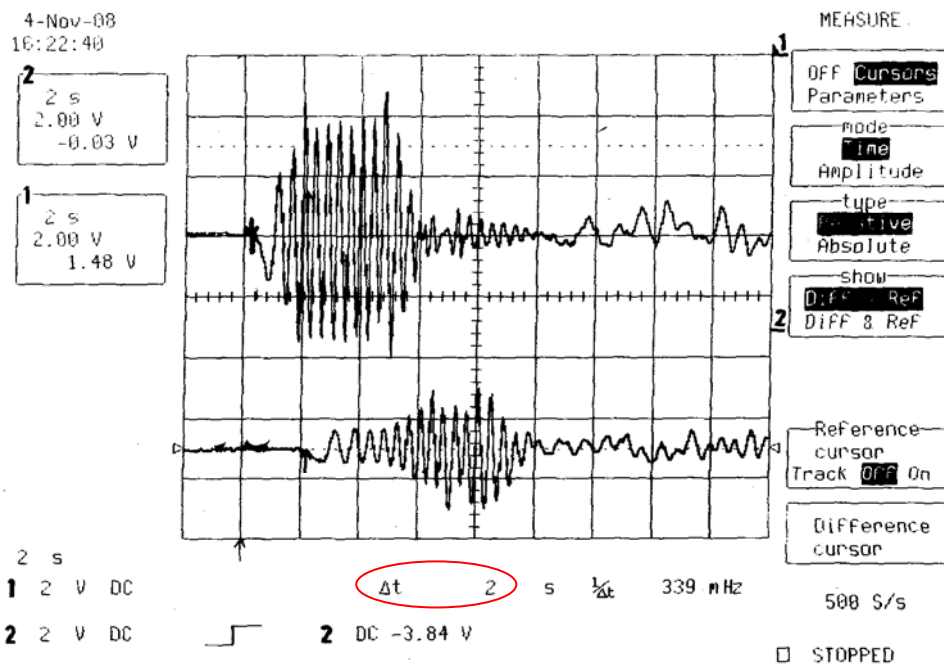


Figure 14 : Chronogramme permettant de calculer la vitesse de propagation

Nous obtenons alors :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 75 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

### 3.3 Niveau spatiale :

#### 3.3.1 Travail préalable :

Avant de commencer l'expérience, nous désirons calculer la correspondance métrique d'un pixel. Ainsi, nous pourrons par la suite à partir d'une longueur d'onde en pixels, en déduire une longueur d'onde métrique. Un étalon de 17 cm à été installé. Après capture d'une image, la longueur de l'étalon un pixel est 140px. On peut en déduire un coefficient  $a$  tel que :

$$a = \frac{17 \cdot 10^{-2}}{140} = 1,214 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{px}^{-1}$$

Il suffira de multiplié par  $a$  une mesure en pixels pour obtenir une mesure en mètres.

#### 3.3.2 Expérience et exploitation :

Après avoir généré le signal de 10 périodes à 2 Hz, nous obtenons un signal de longueur d'onde en pixels :

$$\lambda_p = 400 \text{ px}$$

Nous pouvons donc en déduire la longueur d'onde en mètres :

$$\lambda = a \cdot \lambda_p = 400 \cdot 1,214 \cdot 10^{-3} = 0,049 \text{ m} = 48,6 \text{ cm}$$

Nous pouvons alors en déduire le nombre d'onde  $k$  :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{48,6 \cdot 10^{-2}} = 12,93 \text{ rad. m}^{-1}$$

Nous pouvons alors en déduire la vitesse de propagation :

$$v = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k} = 48,6 \cdot 2 = 97,2 \text{ cm. s}^{-1}$$

Ces résultats concordent avec les résultats trouvés au niveau temporel aux erreurs d'expérience près.

Nous recommençons l'étude avec une fréquence de 2,5 Hz. Nous obtenons un signal de longueur d'onde en pixels :

$$\lambda_p = 260 \text{ px}$$

Nous pouvons donc en déduire la longueur d'onde en mètres :

$$\lambda = a \cdot \lambda_p = 260 \cdot 1,214 \cdot 10^{-3} = 31,6 \text{ cm}$$

Nous pouvons alors en déduire le nombre d'onde  $k$  :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{31,6 \cdot 10^{-2}} = 19,9 \text{ rad. m}^{-1}$$

Nous pouvons en déduire la vitesse de propagation :

$$v = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k} = 26,7 \cdot 2,5 = 78,9 \text{ cm. s}^{-1}$$

Ces résultats concordent avec les résultats obtenus au niveau temporel.

La vitesse théorique et la vitesse expérimentale sont équivalentes aux erreurs d'expérience près.

Nous pouvons justifier l'apparition des ondes stationnaires en expliquant que les ondes incidentes se superposent avec les ondes qui se réfléchissent au fond du canal. On peut donc en déduire que lorsque nous nous éloignons du fond du canal, le T.O.S. diminue puisque nous avons de moins en moins d'ondes réfléchies. Le but lorsque l'on transmet n'importe quel signal est que nous voulons que le T.O.S. soit le plus faible possible.

## 4 Génération d'ondes de grandes amplitudes :

### 4.1 Montage :

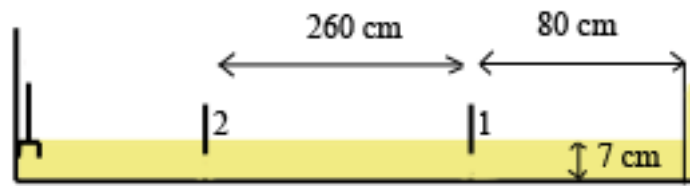


Figure 15 : Montage de la troisième expérience

### 4.2 Expérience et exploitation :

#### 4.2.1 Au niveau temporel :

Nous produisons une vague de grande amplitude appelée soliton. Nous relevons le chronogramme suivant :

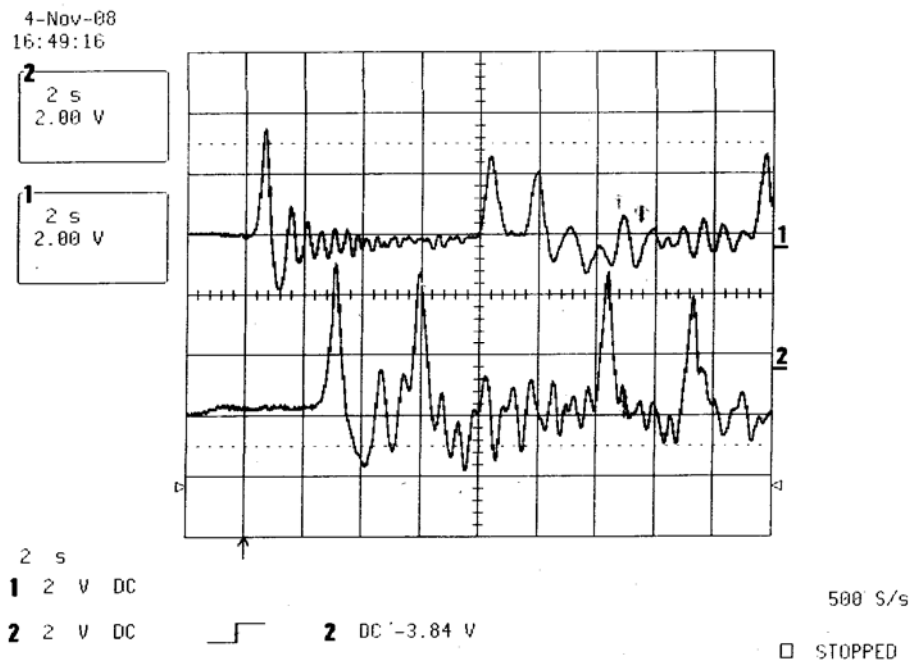


Figure 16 : Signal perçu à la première et seconde sonde

Nous pouvons mesurer la vitesse de propagation du soliton avec deux chronogrammes différents. Nous allons nous baser dans un premier temps sur l'onde incidente (1<sup>er</sup> chronogramme) et dans un second temps sur l'onde réfléchie (2<sup>nd</sup> chronogramme).

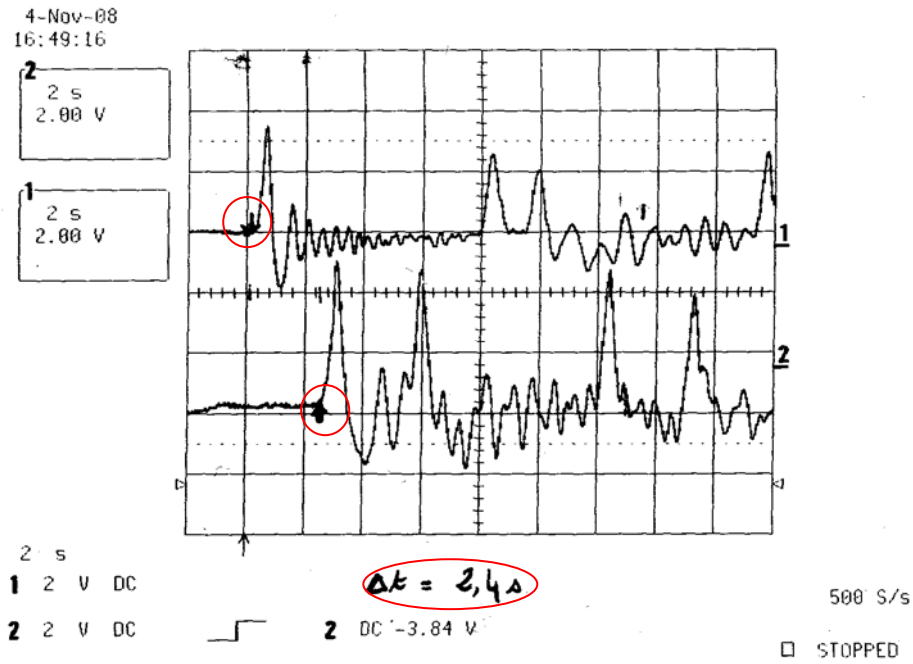


Figure 17 : Chronogramme permettant de calculer la vitesse de propagation avec l'onde incidente

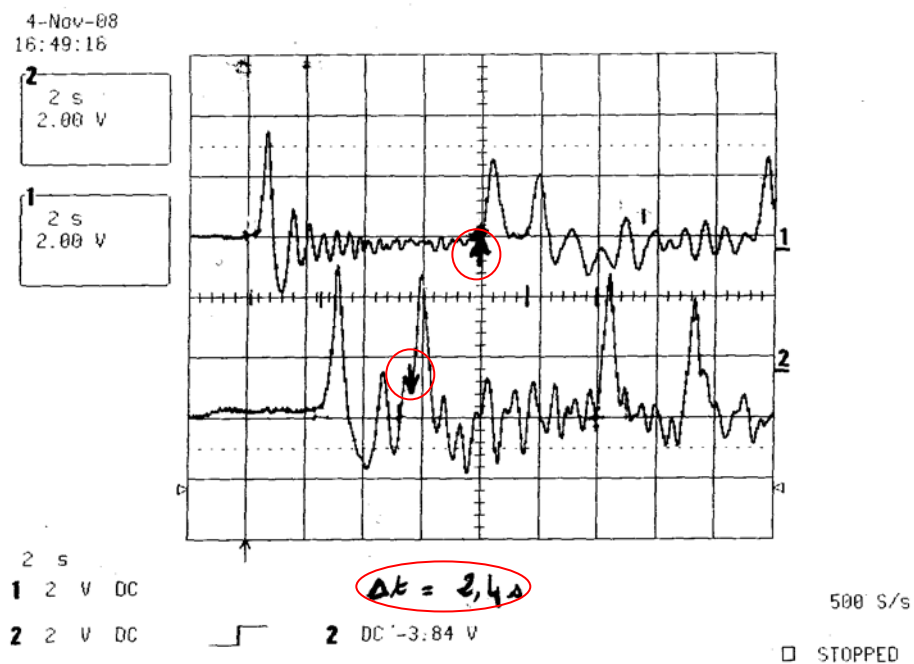


Figure 18 : Chronogramme permettant de calculer la vitesse de propagation avec l'onde réfléchiée par le fond du canal

Dans les deux cas le temps pour que l'onde aille de la première à la seconde sonde ou de la seconde à la première à deux instants différents est le même :

$$dt = 2,4 \text{ s}$$

Nous pouvons donc calculer la vitesse de propagation :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2,6}{2,4} = 1,08 \text{ m.s}^{-1}$$

Nous pouvons donner les propriétés du soliton grâce au chronogramme suivant :

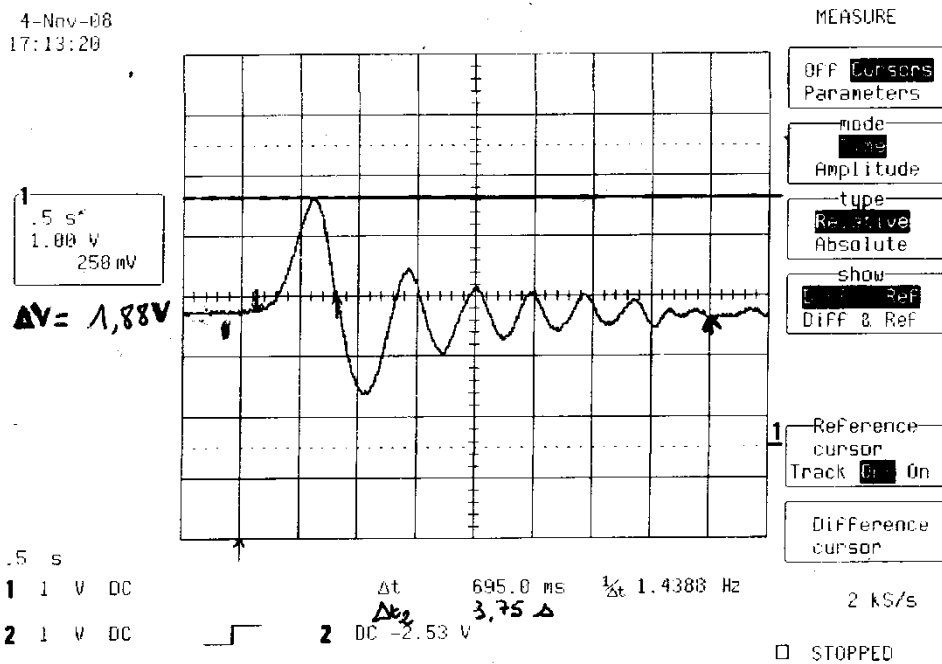


Figure 19 : Chronogramme du soliton

L'amplitude maximale du soliton est :

$$A = 1,88V$$

Ce qui donne avec en valeur métrique :

$$A = 5,2 \text{ mm}$$

La durée du soliton est de :

$$t_s = 695 \text{ ms}$$

La durée du soliton et du paquet d'onde linéaire est :

$$t_{sp} = 3,75 \text{ s}$$

D'où l'étalement du paquet d'onde linéaire est :

$$t_p = 3,75 - 0,695 = 3,065 \text{ s}$$

On peut remarquer sur la figure 18 que la vitesse de ce paquet est moins rapide que celle du soliton :

$$v_p = \frac{dx}{dt} = \frac{2,6}{2,8} = 0,929 \text{ m.s}^{-1}$$

De plus on peut remarquer que ce paquet d'onde se disperse. Ainsi, le soliton se détache de se paquet.

A partir de l'oscilloscope nous avons effectué le relever suivant :

V (V)	t (ms)
0.061	0
0.155	192.5
0.421	267.5
0.600	299.5
0.837	345
1.022	375
1.303	415
1.421	435
1.624	472.5
1.718	487.5
1.866	545
1.733	600
1.421	637.5
1.202	657.5
1.030	672.5
0.820	687.5
0.624	702.5
0.428	720
0.218	742.5
0.044	770

Graphiquement, nous pouvons représenter le nuage de point suivant :

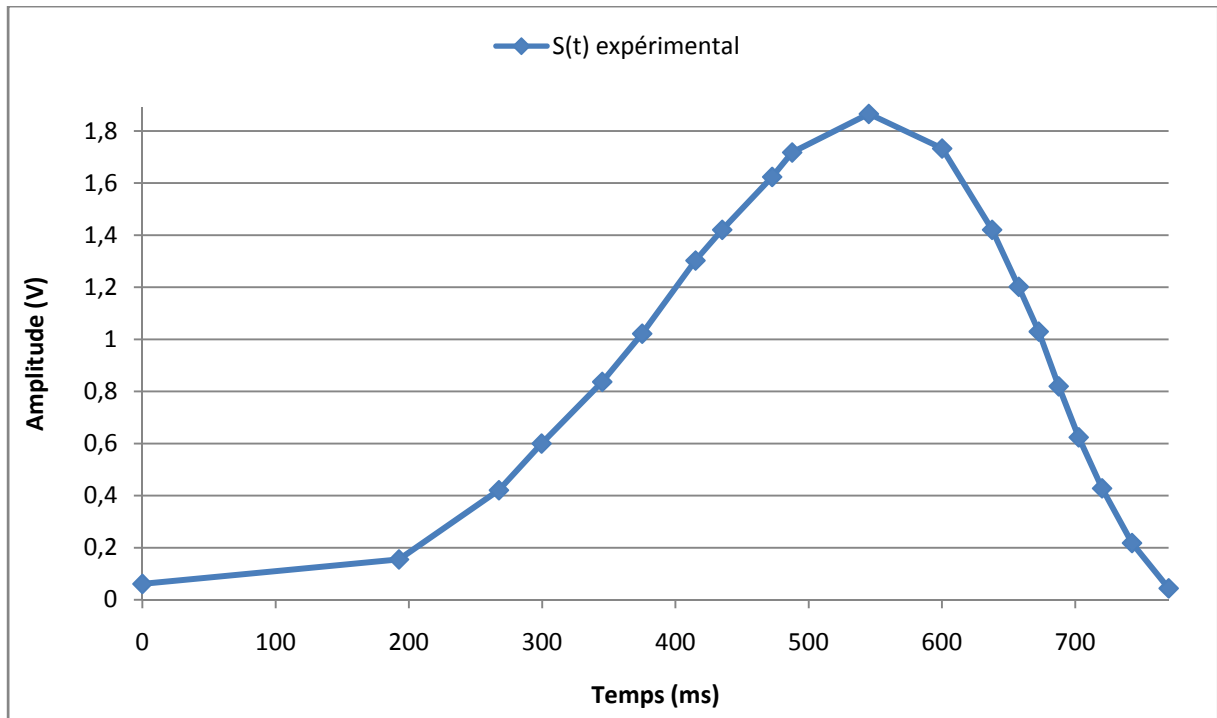


Figure 20 : Amplitude (V) en fonction du temps (ms)

Soit la formule définissant le soliton :

$$S(x, t) = \frac{A}{ch^2(B(x - tv) + Cste)}$$

Nous sommes au niveau temporel donc  $x$  est fixé et  $t$  est variable. Alors nous avons dans ce cas :

$$S(x_0, t) = \frac{A_1}{ch^2(Bx_0 - Bvt + Cste)} = \frac{A_1}{ch^2(-Bvt + Cste)} = \frac{A_1}{ch^2(-B_1t + Cste)}$$

Nous devons donc déterminer  $A_1$ ,  $B_1$ , et la constante.

Donc nous avons  $A_1$  qui est égale à l'amplitude maximale d'où :

$$A_1 = 1,88 \text{ V}$$

Pour déterminer  $B_1$ , nous pouvons utiliser le principe de la méthode des moindres carrés. Cette méthode consiste à minimiser un facteur noté  $\chi^2$  tel que :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i))^2$$

Où  $y_i$  est la valeur expérimental et  $f(x_i)$  est la fonction qui décrit le mieux le nuage de points.

Dans notre cas nous connaissons  $y_i$  et  $f(x_i)$  au constante près. Une façon empirique mais efficace est de représenter le nuage de point et la fonction connu et de faire varier les constantes jusqu'à temps d'obtenir une distance entre les points expérimentaux et théoriques la plus faible possible. Nous avons réalisé cette manipulation en faisant varier  $B_1$  et  $Cste$ . Nous procédons par dichotomie :

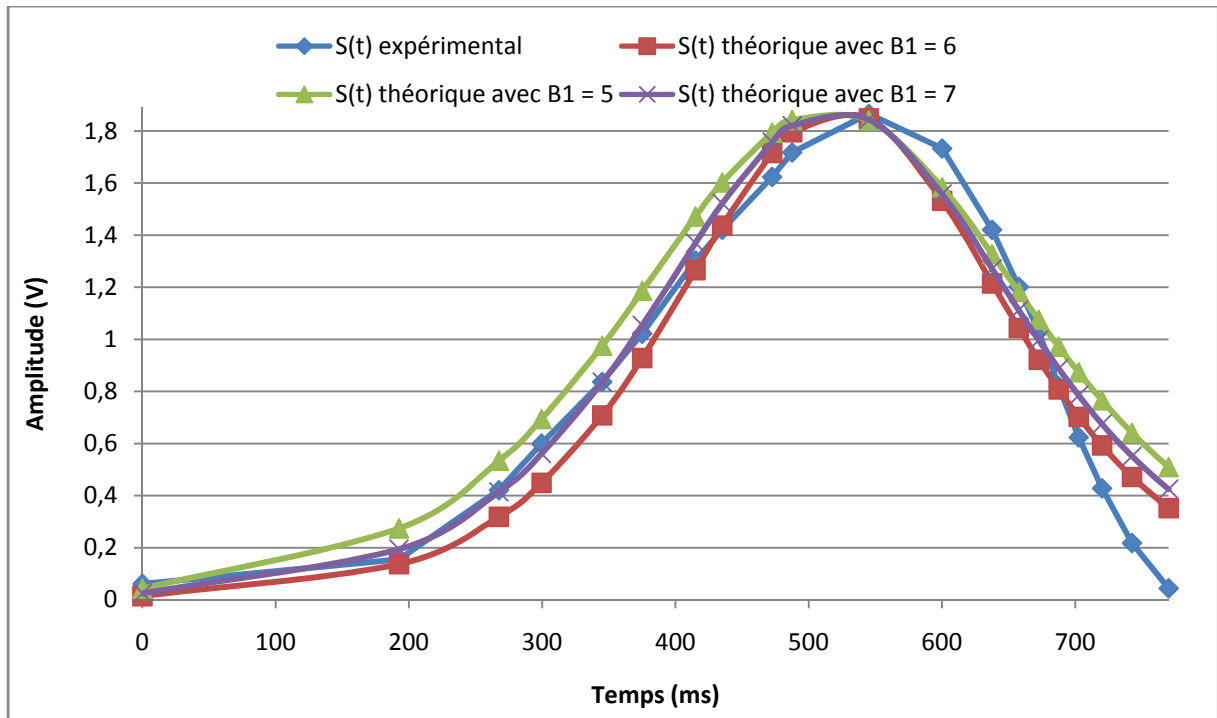


Figure 21 : Recherche de du signal le plus proche de l'expérience en faisant varier le coefficient B1

Nous pouvons donc en déduire que le coefficient B1 est compris entre 5,5 et 6,5. Nous pouvons faire varier B1 par pas de 0,2 et alors choisir la valeur et nous calculerons également  $\chi^2$  pour fixer la meilleure valeur de la constante Cste :



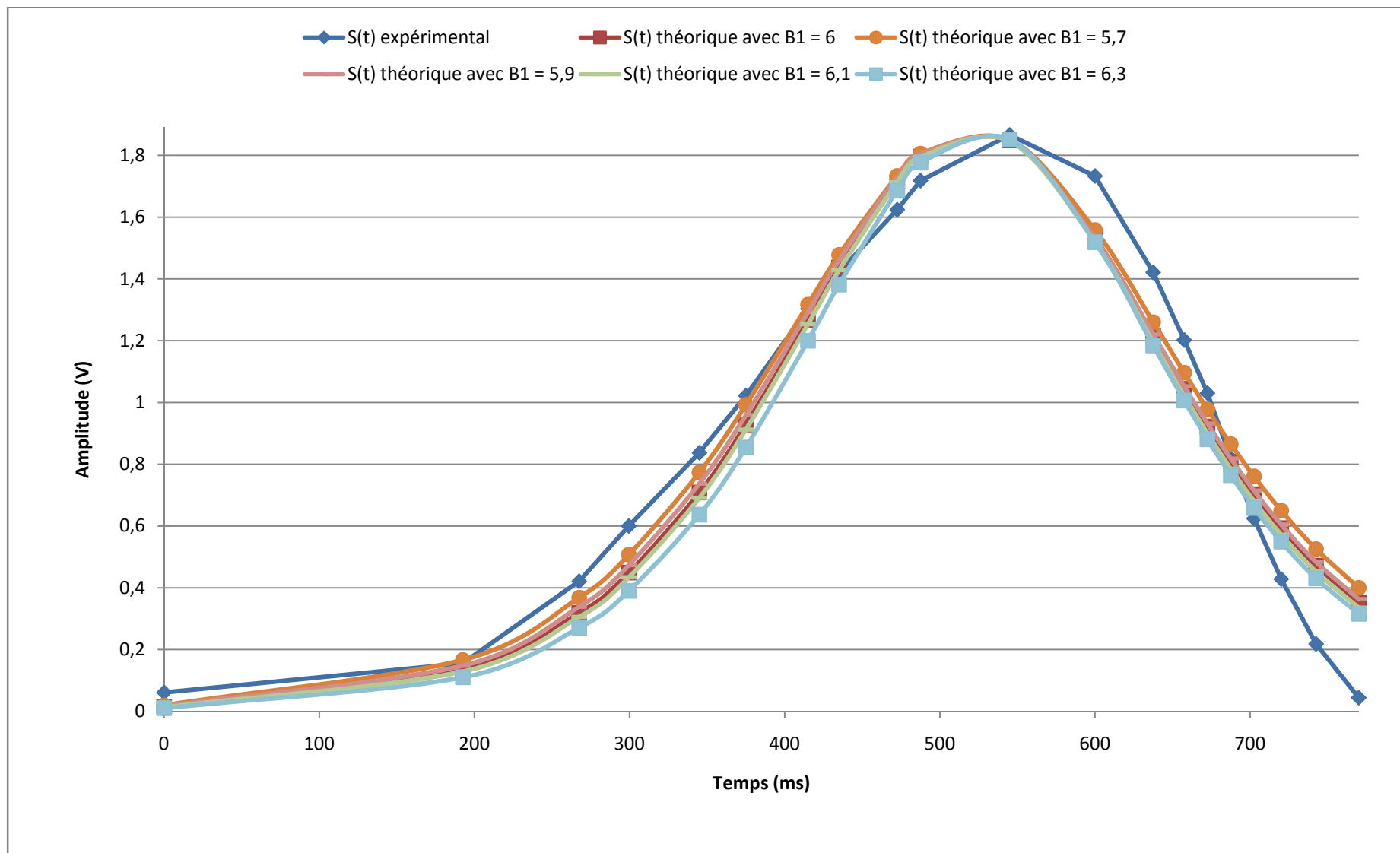


Figure 22 : Courbe théorique pour différentes valeurs de B1 et Cste

Ainsi nous avons calculé  $\chi^2$  pour chaque cas, et nous obtenons :

B1	Cste	$\chi^2$
5,5	2,86	0,459
5,6	2,90	0,428
5,7	2,98	0,403
5,8	3,03	0,387
5,9	3,08	0,384
6	3,14	0,390
6,1	3,19	0,405
6,2	3,25	0,428
6,3	3,31	0,459
6,4	3,37	0,499
6,5	3,42	0,544

Pour cette représentation nous obtenons alors :

$$B_1 = 5,9 \text{ et } Cste = 3,08$$

Le soliton est donc régi par :

$$S(x_0, t) = \frac{1,88}{ch^2(-5,9t + 3,08)}$$

#### 4.2.2 Au niveau spatial :

Nous relevons le nuage de points suivant :

x (px)	S(X) (px)
0	348
43	347
79	343
140	342
170	337
240	329
290	320
357	333
420	339
497	345

Nous commençons tout d'abord par transformer ces valeurs qui sont en pixels en valeurs métriques.

Nous avons déterminé précédemment que la largeur d'un pixel était :

$$a = 1,214 \cdot 10^{-3} \text{ m. px}^{-1}$$

Il nous faudra juste multiplier chaque valeur dans la colonne x par cette constante pour obtenir une valeur en mètres.

En ce qui concerne  $S(x)$  il faut multiplier par la hauteur d'un pixel. Nous devons donc trouver la valeur de  $b$ . D'après le relevé d'un étalon nous obtenons :

$$b = \frac{9,85 \cdot 10^{-2}}{60} = 1,642 \cdot 10^{-3} m \cdot px^{-1}$$

L'orientation de l'axe de  $S(x)$  lors du relevé étant vers le bas nous devons normaliser les valeurs pour obtenir un maximum pour l'amplitude la plus élevée lors du passage du soliton à  $t_0$ . Nous avons donc de choisir comme origine la hauteur initiale de l'eau dans le bassin. Nous avons donc par exemple pour le premier point :

$$S(x)_1 = (348 - 348) \cdot b$$

Nous obtenons ainsi le tableau de valeurs suivant :

$x$ (m)	$S(X)$ (m)
0,052202	0
0,095906	0,00164167
0,16996	0,00820833
0,20638	0,00985
0,29136	0,01805833
0,35206	0,03119167
0,433398	0,04596667
0,50988	0,024625
0,603358	0,014775
0,052202	0,004925

La représentation graphique est donc la suivante :

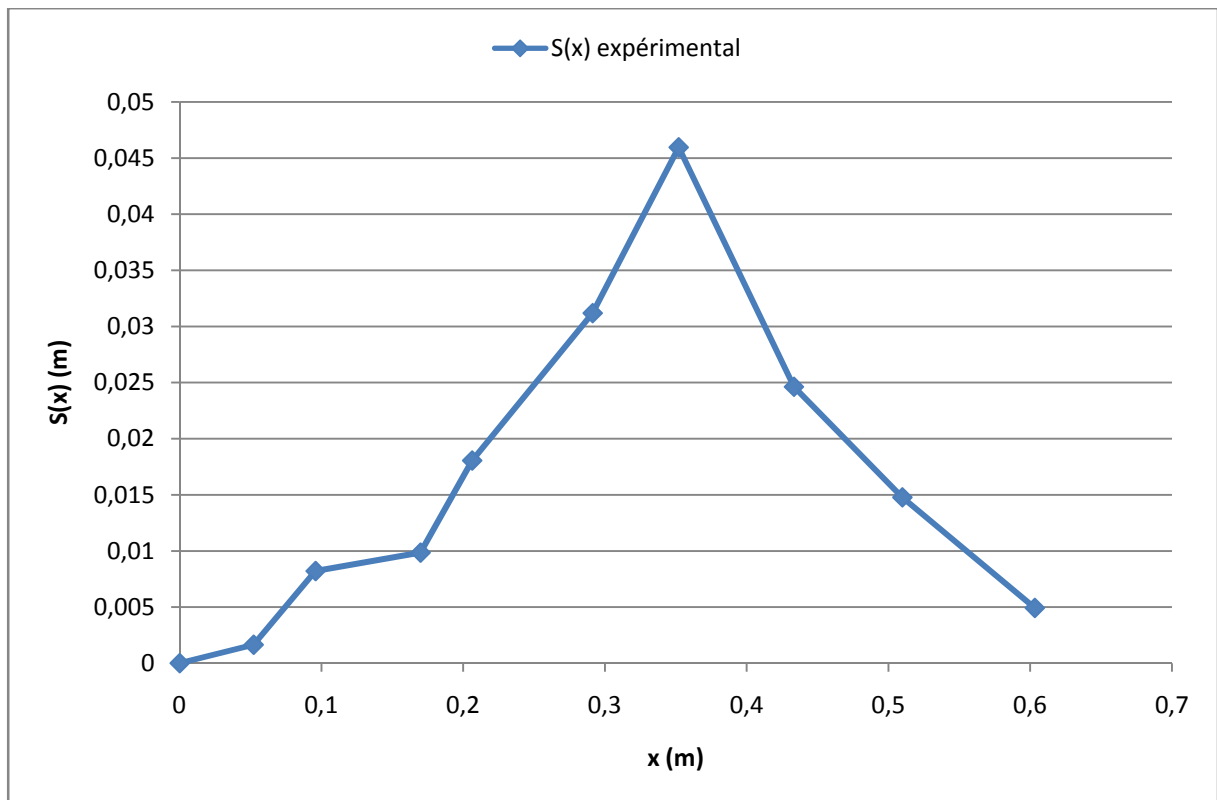


Figure 23 : Représentation expérimental de S(x) en fonction x

La représentation fonctionnelle est la même que précédemment sauf que nous faisons varier x et fixons t à t<sub>0</sub>.

En faisant varier x et t étant fixé nous avons alors :

$$S(x, t_0) = \frac{A_0}{ch^2(Bx - Bvt_0 + Cste)} = \frac{A_0}{ch^2(Bx + Cste)}$$

Nous procédons avec les mêmes méthodes que pour la méthode temporelle c'est-à-dire que nous utilisons la méthode carrés. Nous obtenons l'approximation suivante :

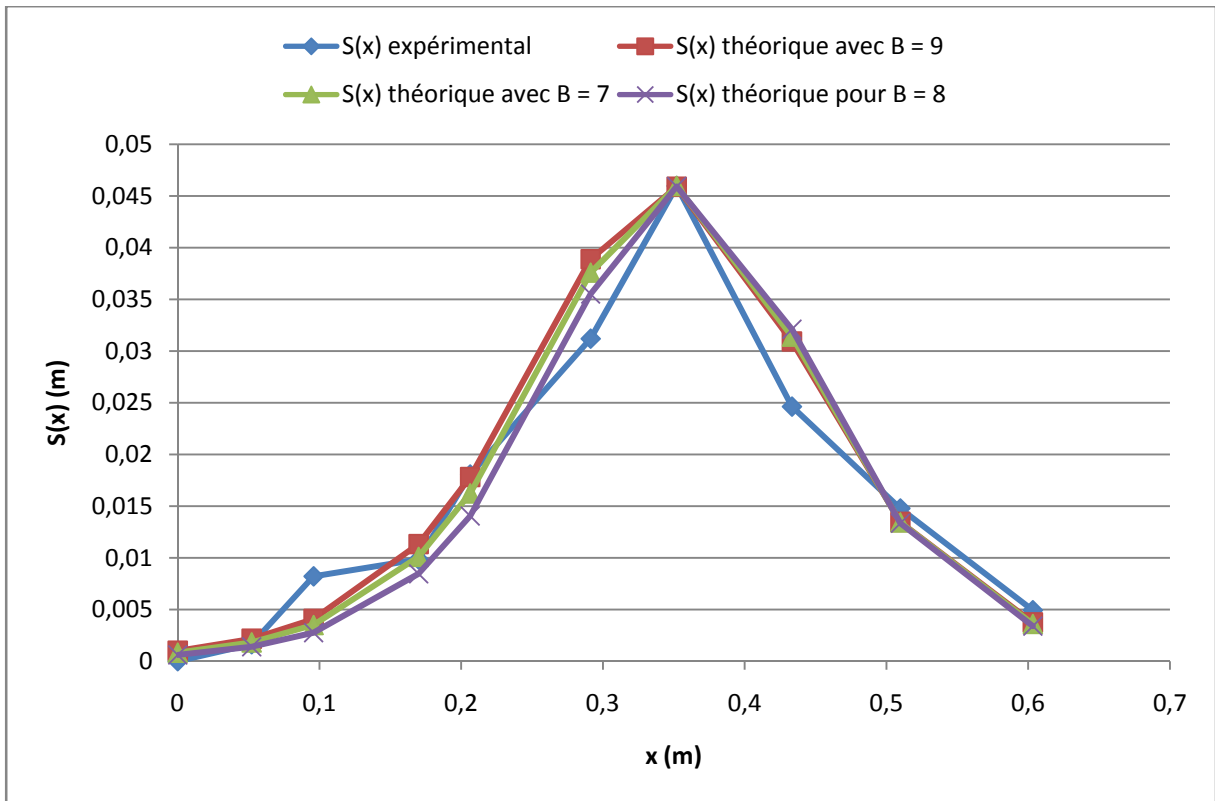


Figure 24 : Première approximation par méthode des moindres carrés

Nous pouvons affiner notre constante entre 7,5 et 8,5 par pas de 0,2. Nous obtenons :

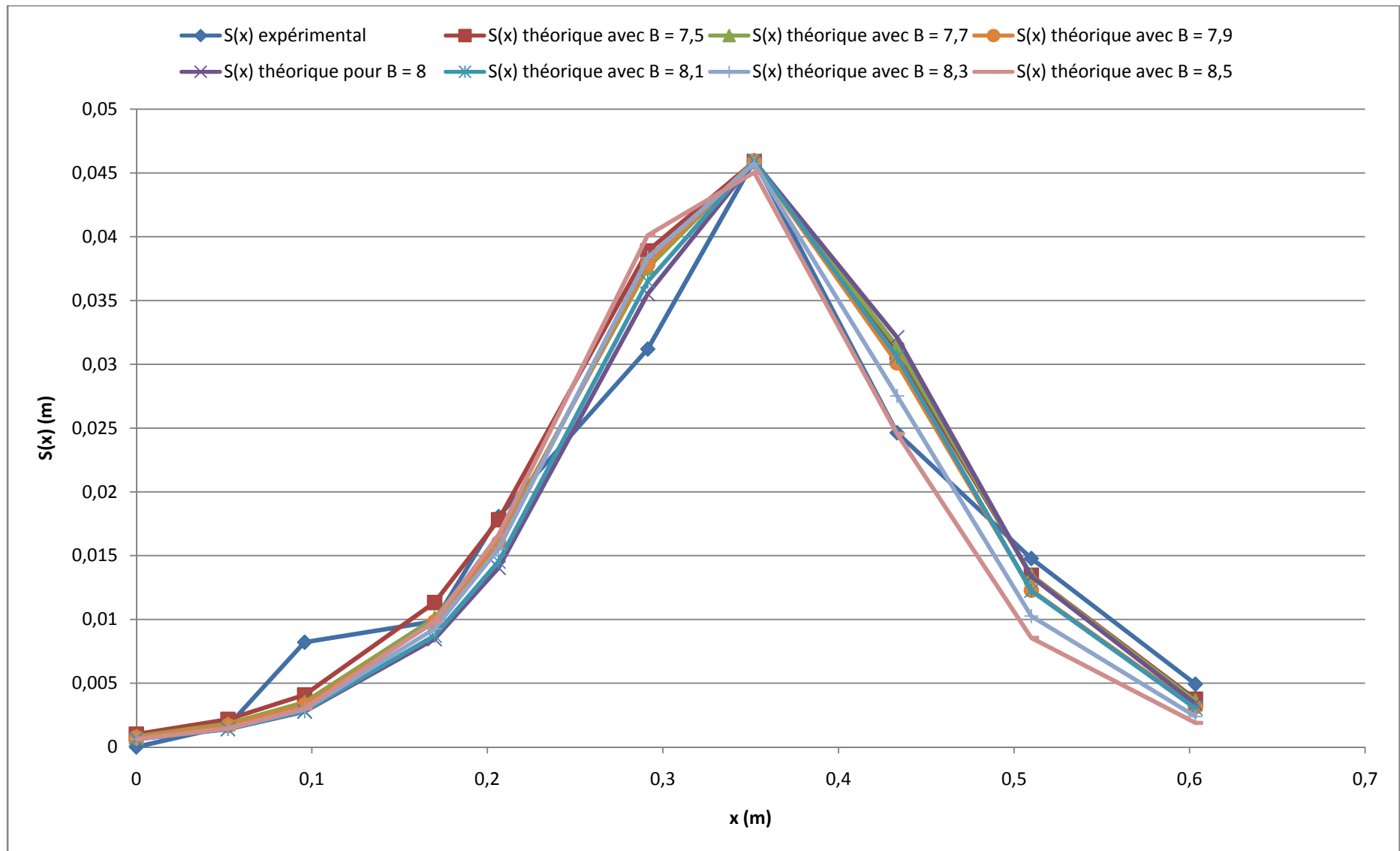


Figure 25 : Différentes courbes pour des valeurs différentes de B et Cste

Ainsi nous avons calculé  $\chi^2$  pour chaque cas, et nous obtenons :

B1	Cste	$\chi^2$
7,5	2,6	0,123
7,7	2,7	0,117
7,9	2,75	0,112
8	2,85	0,127
8,1	2,85	0,121
8,3	2,85	0,122
8,5	2,85	0,158

Pour cette représentation nous obtenons alors :

$$B = 7,9 \text{ et } Cste = 2,75$$

Le soliton est donc régi par :

$$S(x, t_0) = \frac{0,0459}{ch^2(-7,9t + 2,75)}$$

Or nous avons posé précédemment :

$$B_1 = Bv$$

Donc :

$$\frac{B_1}{B} = \frac{Bv}{B} = v$$

Nous pouvons alors en déduire la vitesse du soliton. Nous obtenons alors :

$$v = \frac{5,9}{7,9} = 0,747 \text{ m.s}^{-1}$$

Nous pouvons dire que le résultat obtenu ne correspond pas au résultat escompté ceci venant de l'imprécision du relevé du soliton au niveau spatial.