

Jeanniard Sébastien

Lemaître Guillaume

TP n°2 : Courbe de dispersion d'une ligne électrique

## 1 Description de la ligne :

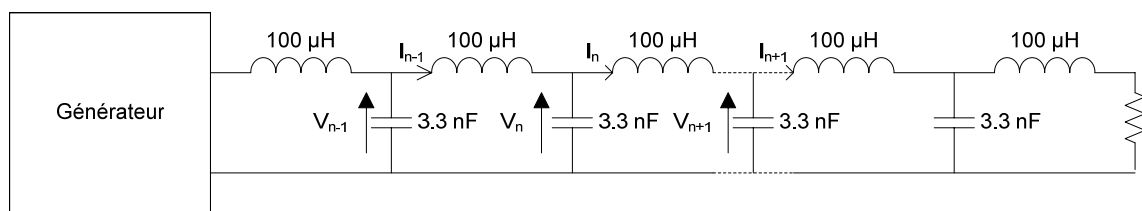


Figure 1 : Représentation de la ligne

## 3 Mesure à effectuer et à commenter :

### 3.1 Adaptation en bout de ligne :

Dans le cas général, c'est-à-dire pour une onde qui est incidente et réfléchie, l'impédance caractéristique est donnée par :

$$\frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{\overline{V_{0+}e^{-\gamma x} + V_{0-}e^{\gamma x}}}{\overline{I_{0+}e^{-\gamma x} + I_{0-}e^{\gamma x}}} = \overline{Z_c(x)}$$

Dans le cas d'une ligne semi-infinie, l'onde est seulement incidente et n'est donc pas réfléchie.

En fonction des différents paramètres d'une ligne de transmission, nous obtenons :

$$\overline{Z_c(\omega)} = \sqrt{\frac{(R + jL\omega)}{(G + jC\omega)}}$$

Or les pertes peuvent être considérées comme faibles d'où :

$$R \ll jL\omega \text{ et } G \ll jC\omega$$

On a donc :

$$\overline{Z_c(\omega)} = \sqrt{\frac{jL\omega}{jC\omega}}$$

Ce qui simplifié donne une impédance caractéristique qui ne dépend pas de la fréquence de la forme :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Ce qui nous donne avec  $L = 110 \mu\text{H}$  et  $C = 3.3 \text{ nF}$

$$Z_c = \sqrt{\frac{110 \cdot 10^{-6}}{3.3 \cdot 10^{-9}}} = 182,6 \Omega$$

## 3.2 Etude de la dispersion :

### 3.2.1 Etude des chronogrammes :

Nous avons effectué un relevé des oscillogrammes à la cellule 2 où nous avons posé la première sonde et à la cellule 27 à nous avons posé la seconde sonde. Nous obtenons le relevé suivant :

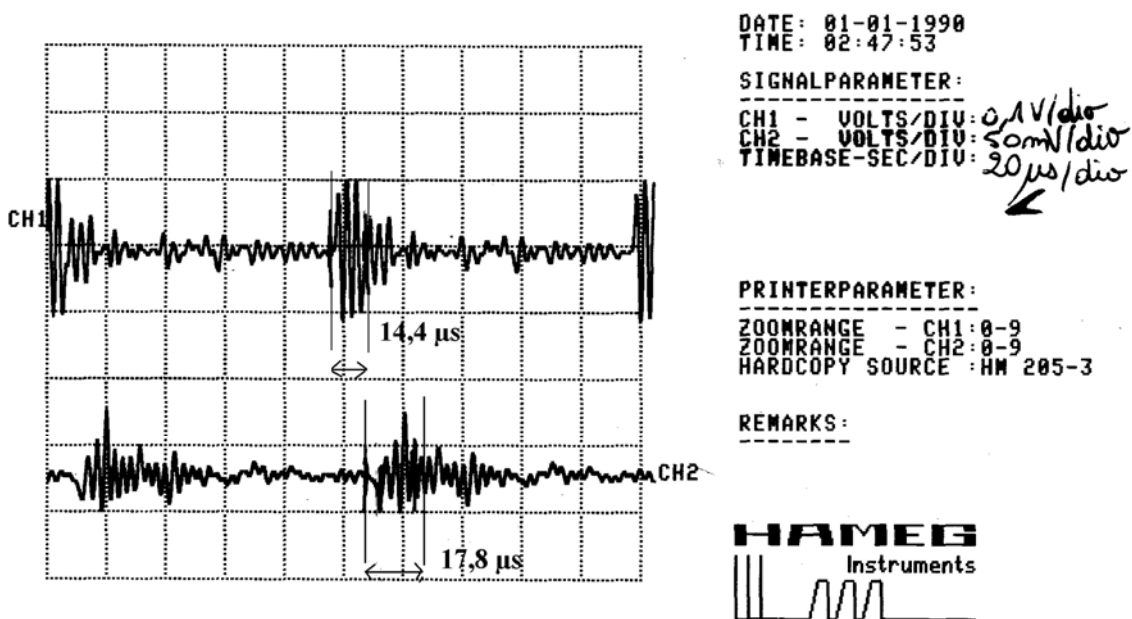


Figure 2 : Onde relevé à la cellule 2 (CH1) et à la cellule 27 (CH2)

Nous avons mesuré la largeur du train d'ondes que nous avons généré. A la cellule 2, la largeur du train d'ondes vaut  $14,4 \mu\text{s}$ . A la cellule 27, la largeur du train d'onde est  $17,8 \mu\text{s}$ . On peut donc remarquer que le signal s'est étalé entre les deux cellules.

Nous avons également mesuré la vitesse de propagation. Pour cela, nous avons mesuré la vitesse de groupe et de phase du train d'onde :

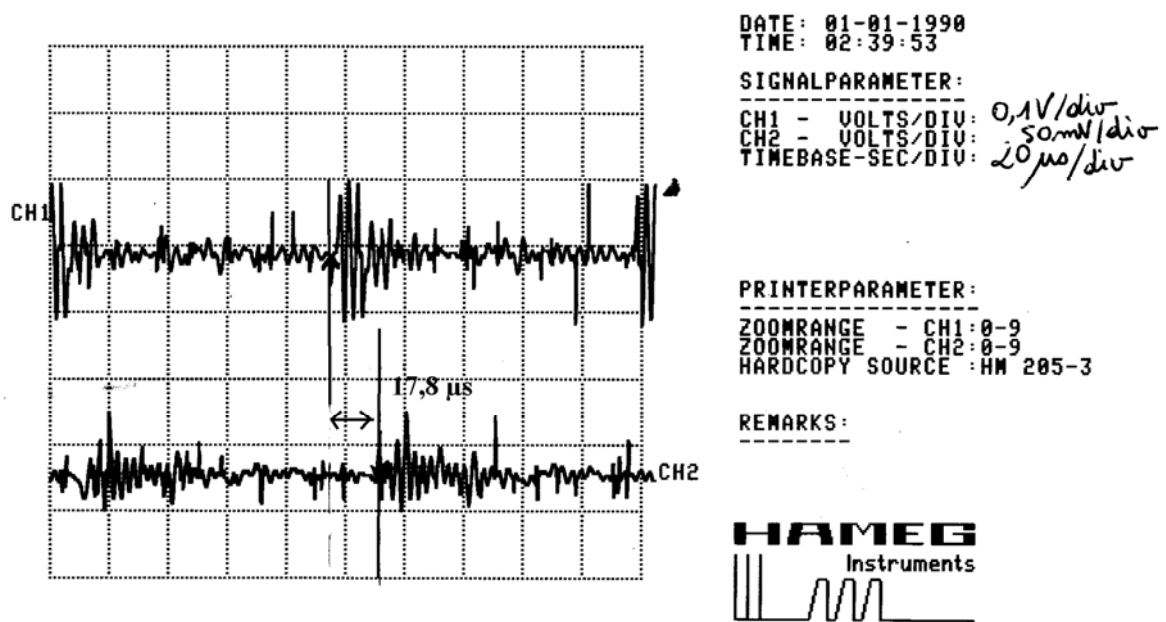


Figure 3 : Mesure de la vitesse de phase

La vitesse de phase est donné par :

$$v_{\phi} = \frac{dn}{dt}$$

Ceci revient à calculer le rapport du déplacement du début du signal entre les deux sondes par le temps que met le début du signal pour aller de la première sonde à la seconde. A partir de ce chronogramme, nous pouvons en déduire la vitesse de phase :

$$v_{\phi} = \frac{25}{17,8 \cdot 10^{-6}} = 1,40 \cdot 10^6 \text{ cells} \cdot \text{s}^{-1}$$

On peut ajouter que la vitesse de phase ne prend pas en compte le phénomène de dispersion.

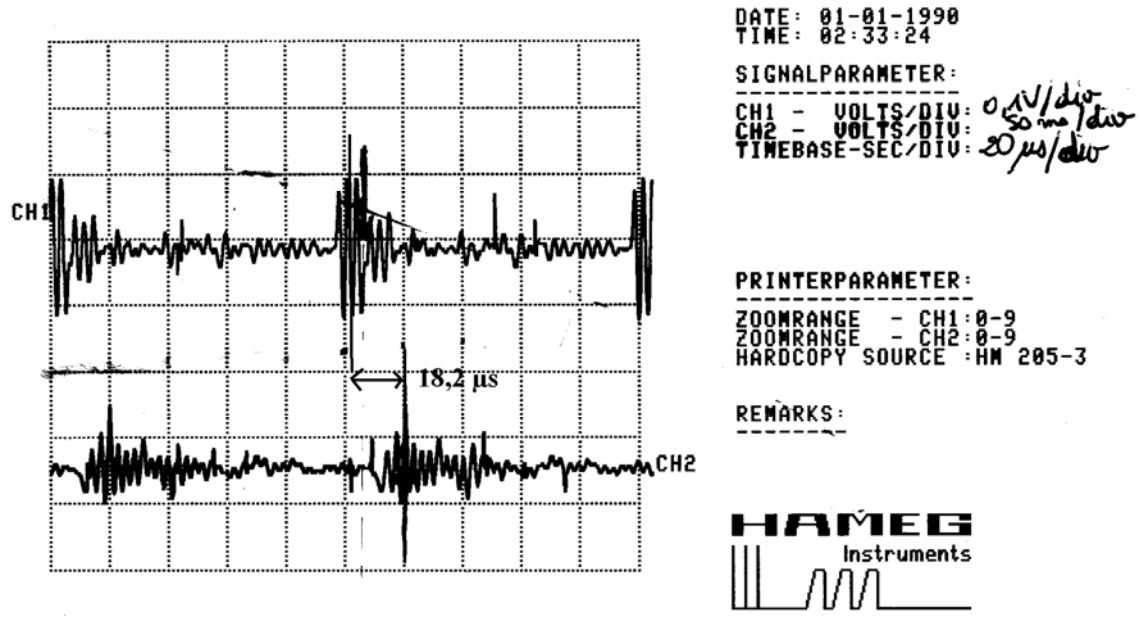


Figure 4 : Mesure de la vitesse de groupe

A contrario, la vitesse de groupe prend en compte le phénomène de dispersion si nous sommes dans un milieu dispersif. Cette vitesse revient au rapport de la pulsation sur le nombre d'onde :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\phi + k \cdot \frac{dv_\phi}{dk}$$

On peut noter que lorsque le milieu est non dispersif, la vitesse de phase et de gain sont égales.

Dans notre cas, ceci revient à calculer le rapport du déplacement du milieu du signal entre les deux sondes par le temps que met le milieu du signal pour aller de la première sonde à la seconde. A partir de ce chronogramme, on peut en déduire la vitesse de phase.

$$v_g = \frac{25}{18,2 \cdot 10^{-6}} = 1,37 \cdot 10^6 \text{ cells} \cdot \text{s}^{-1}$$

On s'aperçoit que le phénomène de dispersion entre ces 25 cellules est très faible.

### 3.2.2 Etude de la relation de dispersion :

D'après les équations de Kirchhoff, on a :

$$v(n+1, t) - v(n, t) = -r \cdot i(n, t) - jL\omega \cdot \frac{di(n, t)}{dt}$$

Et

$$i(n+1, t) - i(n, t) = -g \cdot v(n, t) - jC\omega \cdot \frac{dv(n, t)}{dt}$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{dv(n, t)}{dn} = -r \cdot i(n, t) - jL\omega \cdot \frac{di(n, t)}{dt}$$

Et

$$\frac{di(n, t)}{dn} = -g \cdot v(n, t) - jC\omega \cdot \frac{dv(n, t)}{dt}$$

D'où les dérivées secondes :

$$\frac{d^2v(n, t)}{dn^2} = jLC\omega^2 \cdot \frac{d^2v(n, t)}{dt^2} + (jL\omega \cdot g + r \cdot jC\omega) \cdot \frac{dv(n, t)}{dt} + rg \cdot v(n, t)$$

Et

$$\frac{d^2i(n, t)}{dn^2} = jLC\omega^2 \cdot \frac{d^2i(n, t)}{dt^2} + (jL\omega \cdot g + r \cdot jC\omega) \cdot \frac{di(n, t)}{dt} + rg \cdot i(n, t)$$

Nous pouvons simplifier :

$$\frac{d^2v(n, t)}{dn^2} = Y^2 \cdot v(n, t)$$

Et

$$\frac{d^2i(n, t)}{dn^2} = Y^2 \cdot i(n, t)$$

Avec

$$Y = \sqrt{(G + jC\omega)(R + jL\omega)}$$

Soit l'onde plane :

$$V_n = V_0 \cdot e^{-j(\omega t - kn)}$$

On obtient alors :

$$\frac{d^2v(n, t)}{dn^2} = Y^2 \cdot v_0 \cdot e^{-j(\omega t - kn)}$$

La solution générale est donc :

$$V(n, t) = \sqrt{\frac{(R + jL\omega)}{(G + jC\omega)}} \cdot \cos(\omega t - kn)$$

Où :

$$\overline{Z_c(\omega)} = \sqrt{\frac{(R + jL\omega)}{(G + jC\omega)}}$$

Puisque nous sommes dans une ligne semi-infinie nous savons que :

$$R \ll jL\omega \text{ et } G \ll jC\omega$$

On peut donc en déduire :

$$\omega = \frac{k}{(\sqrt{LC})}$$

### 3.2.3 Détermination de la fréquence de coupure :

En effectuant la manipulation, nous relevons une fréquence de coupure tel que :

$$F_c = 530 \text{ kHz}$$

### 3.2.4 Tracer de la courbe de dispersion :

En effectuant les calculs, nous nous sommes aperçu qu'il existait un facteur multiplicateur par 2 entre la manipulation et la théorie.

Numéro de cellules	k expérimental	k théorique	k théorique facteur 2	Fréquence (kHz)	$\Omega$ (rad/s)
2	3,14159265	1,45745082	2,91490165	385	2419026,34
6	1,04719755	0,55269564	1,10539128	146	917345,055
10	0,62831853	0,3369172	0,67383441	89	559203,492
14	0,44879895	0,2536343	0,5072686	67	420973,416
18	0,34906585	0,18927933	0,37855866	50	314159,265
22	0,28559933	0,16656581	0,33313162	44	276460,154
26	0,24166097	0,12113877	0,24227754	32	201061,93
30	0,20943951	0,1135676	0,22713519	30	188495,559
34	0,18479957	0,10599642	0,21199285	28	175929,189
38	0,16534698	0,10221084	0,20442167	27	169646,003
42	0,14959965	0,08706849	0,17413698	23	144513,262

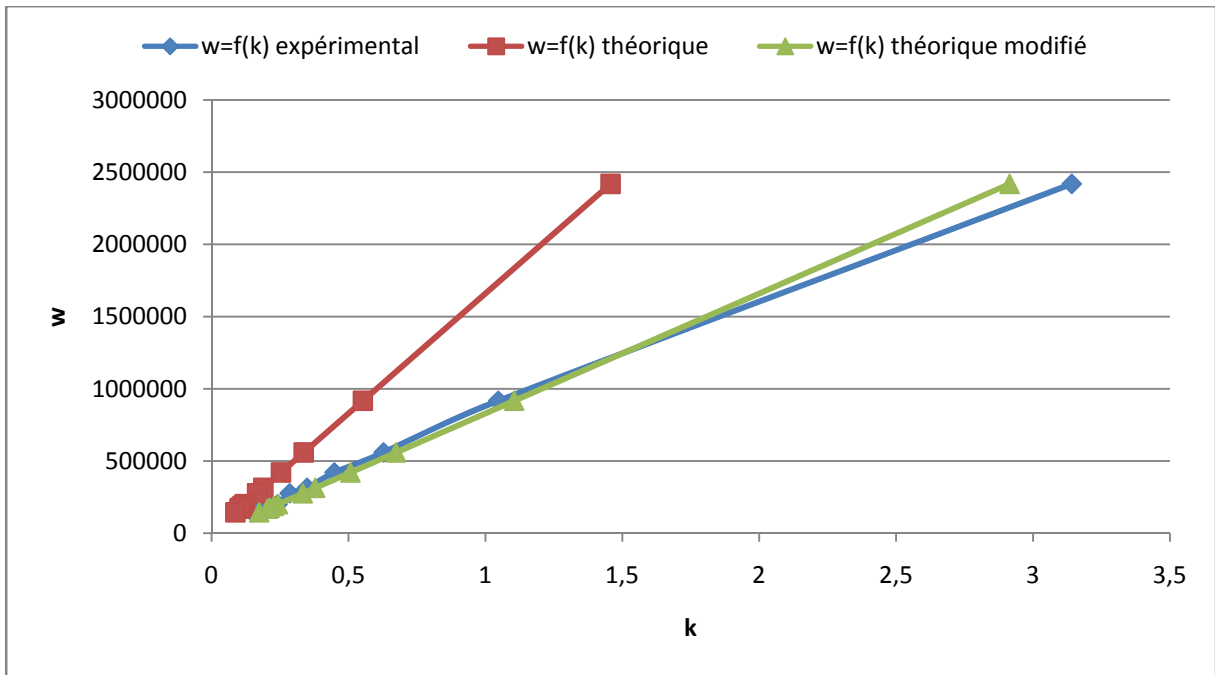


Figure 5 : Graphique représentant  $w=f(k)$

### 3.3 Etude de la dissipation :

Numéro de cellules	Vn	Vn/V0
0	6	1
2	3,25	0,54166667
6	3	0,5
10	2,8	0,46666667
14	2,1	0,35
18	1,8	0,3
22	1,6	0,26666667
26	1,5	0,25
30	1,2	0,2
34	1	0,16666667
38	0,8	0,13333333
42	0,5	0,08333333

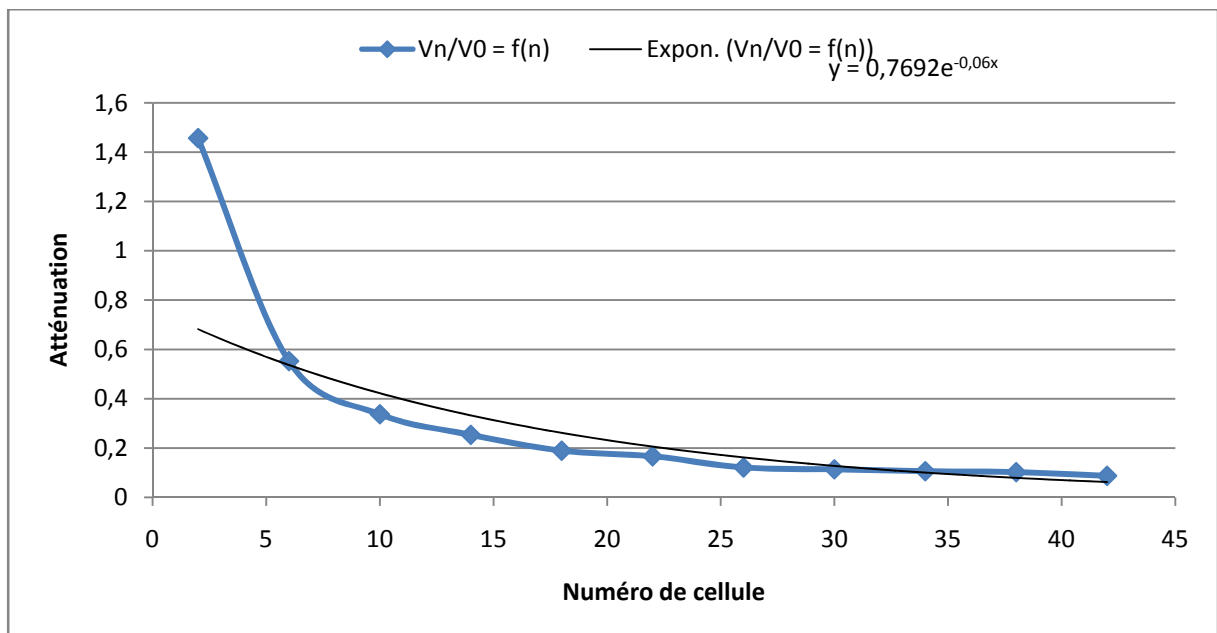


Figure 6 : Atténuation en fonction du numéro de cellule et courbe de tendance de forme exponentielle

Nous avons donc :

$$V_1 = 0,7692 \text{ et } \alpha = 0,06$$

On a donc :

$$r = 2 \cdot \alpha \cdot R_c = 2 \cdot 0,06 \cdot 182,6$$

$$r = 21,9 \Omega$$

D'où

$$Q = \frac{L \cdot \omega}{r} = \frac{10^3 \cdot 110 \cdot 10^{-6}}{21,9}$$

$$Q = 0,0005 \text{ H} \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \Omega^{-1}$$



La qualité des selfs utilisées dans le TP sont de mauvaises qualités