

Jeanniard Sébastien

Lemaître Guillaume

TP n°1 : Théorème de Shannon–Modulation de fréquence

## 1 Acquisition d'un signal avec l'oscilloscope numérique LeCroy 9310 : Théorème de Shannon :

### 1.3 Etude de la fréquence d'échantillonnage de l'oscilloscope :

#### 1.3.1 Analyse théorique :

Nous avons un signal analogique tel que :

$$f(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$$

La transformée de Fourier de ce signal analogique est :

$$F(f) = \frac{A}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

La représentation de ce spectre est la suivante :

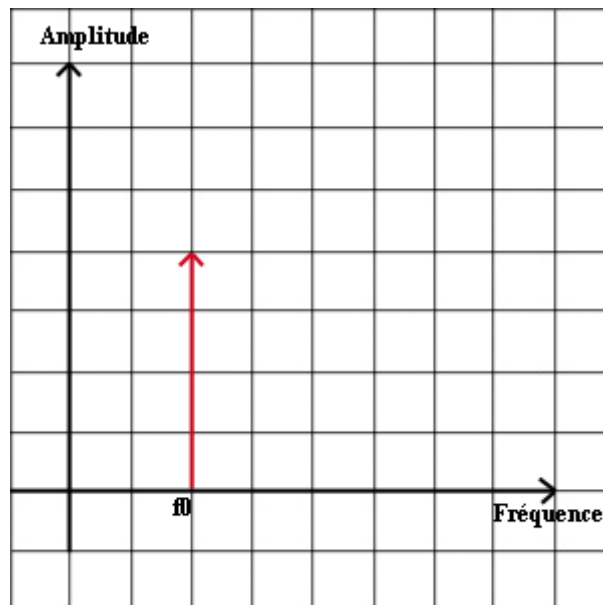


Figure 1 : Spectre d'amplitude du signal analogique

Nous avons représenté le spectre d'amplitude que dans les fréquences positives. Normalement, nous avons une symétrie par rapport aux axes des amplitudes.

Ce signal sera échantillonné avec une fréquence  $F_e$ .

Un signal échantillonné est exprimé sous sa forme générale :

$$x_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e)$$

Appliqué au signal sinusoïdal précédent, nous avons :

$$f_{T_e}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot nT_e) \cdot \delta(t - nT_e)$$

La transformée de Fourier d'un signal  $x_{T_e}(t)$  est :

$$X_{T_e}(f) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nF_e)$$

Nous avons donc dans notre cas :

$$F_{T_e}(f) = \frac{AF_e}{2j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0 - nF_e) - \delta(f + f_0 - nF_e)$$

D'où :

$$F_{T_e}(f) = \frac{AF_e}{2j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta((nF_e + f_0) - f) - \delta((nF_e - f_0) - f)$$

La représentation du spectre avec une fréquence  $F_e = 5$  kHz est la suivante :

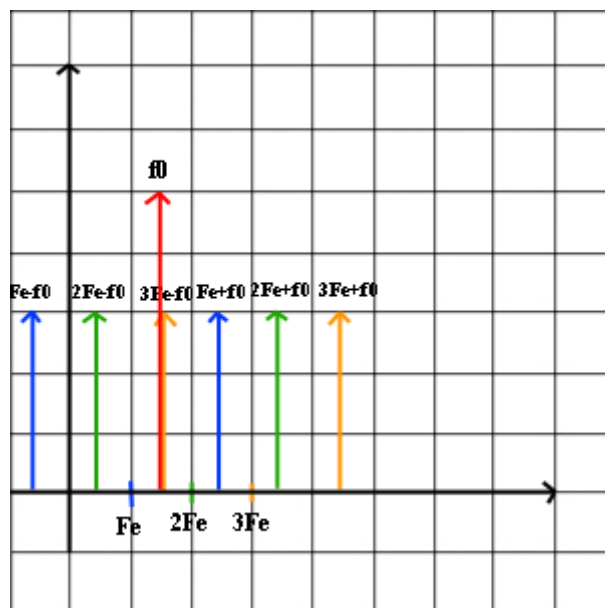


Figure 2 : Spectre d'un sinus échantillonné à 5 kHz

Nous pouvons remarquer un recouvrement. Le théorème de Shannon n'est pas respecté. Le signal échantillonné ne synthétisera pas un sinus.

La représentation du spectre avec une fréquence  $F_e = 10$  kHz est la suivante :

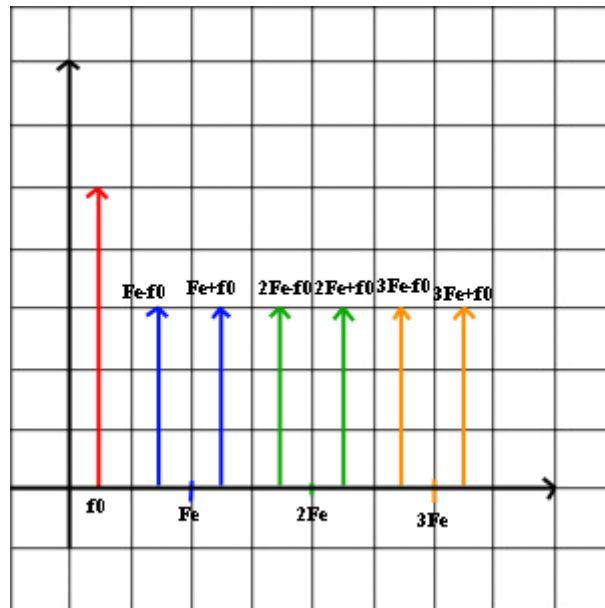


Figure 3 : Spectre d'un sinus échantillonné à 10 kHz

Nous pouvons remarquer aucun recouvrement. Le théorème de Shannon est respecté. Le signal échantillonné synthétisera parfaitement un sinus.

### 1.3.2 Etude expérimentale :

Nous réglons le nombre de points  $N = 1000$  et la base de temps à 20 ms/div. Nous calculons alors la fréquence d'échantillonnage de l'oscilloscope tel que :

$$F_e = \frac{N}{2 \cdot \text{Base de temps}}$$

$$F_e = \frac{1000}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 25 \text{ kHz}$$

Nous obtenons après FFT le spectre suivant :

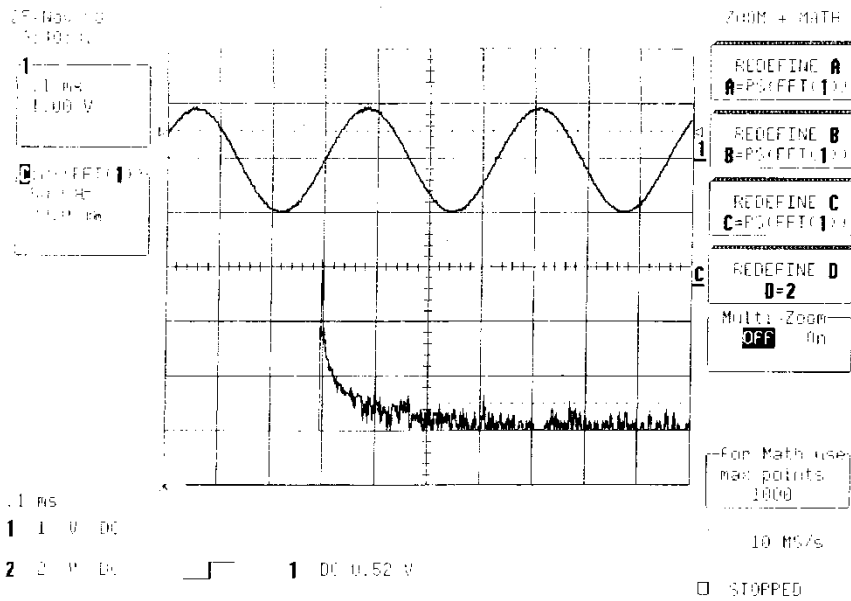


Figure 4 : Spectre avec N = 1000 et la base de temps égal à 20 ms

Nous réglons N = 5000 et la base de temps à 20 ms/div. La fréquence d'échantillonnage sera alors de :

$$F_e = \frac{5000}{2.20 \cdot 10^{-3}} = 125 \text{ kHz}$$

Nous obtenons alors le spectre suivant :

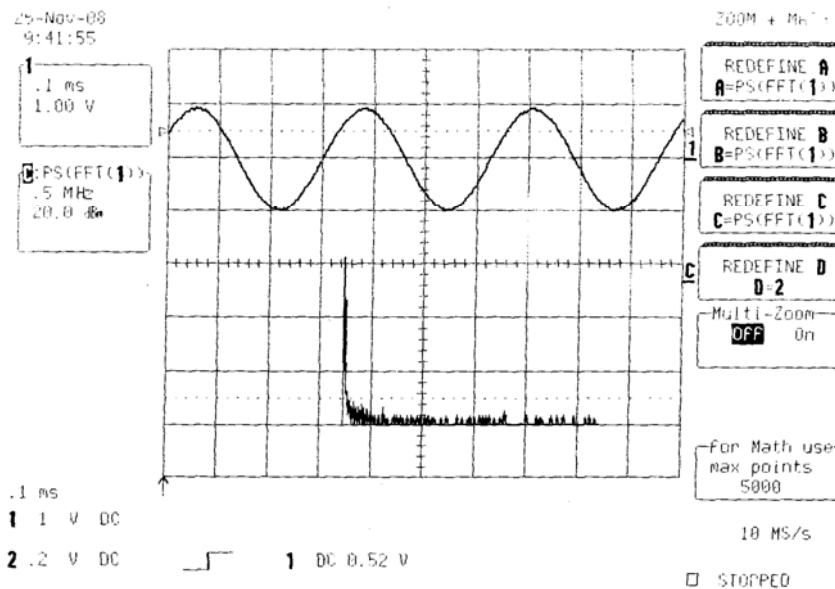


Figure 5 : Spectre avec N = 5000 et la base de temps égal à 20 ms

Nous réglons le nombre de points à N = 1000 et la base de temps à 10 ms/div. La fréquence d'échantillonnage sera alors de :

$$F_e = \frac{1000}{2.10.10^{-3}} = 50 \text{ kHz}$$

Le spectre correspondant est le suivant :

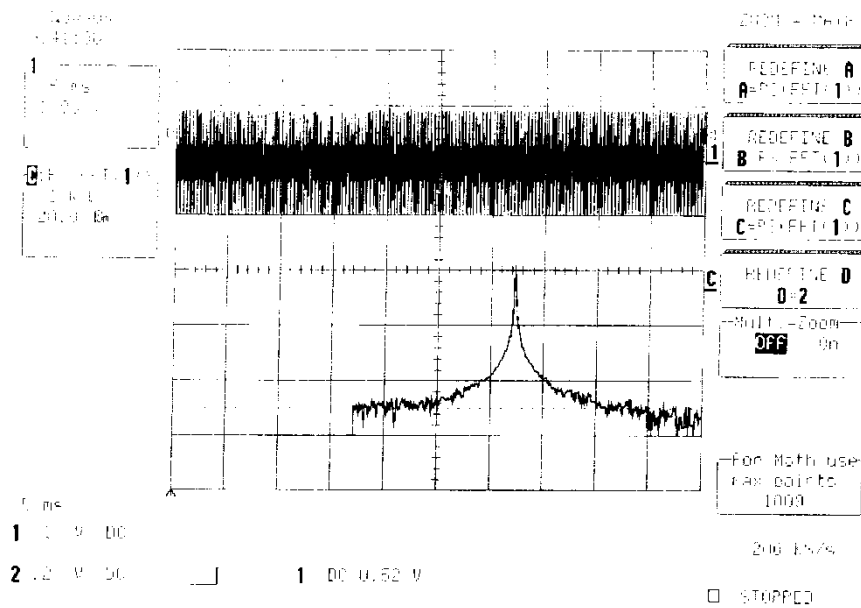


Figure 6 : Spectre avec N =1000 et la base de temps à 10 ms/div

## 2 Détermination de la sensibilité d'un modulateur FM :

### 2.1 Unité de $k_f$ :

Nous avons la relation suivante :

$$f(t) = f_p + k_f \cdot x(t)$$

Cette relation peut s'écrire également :

$$f(t) - f_p = k_f \cdot x(t)$$

En exprimant uniquement les unités de chaque membre de cette équation nous avons :

$$[Hz] = k_f \cdot [V]$$

D'où :

$$k_f = \frac{[Hz]}{[V]}$$

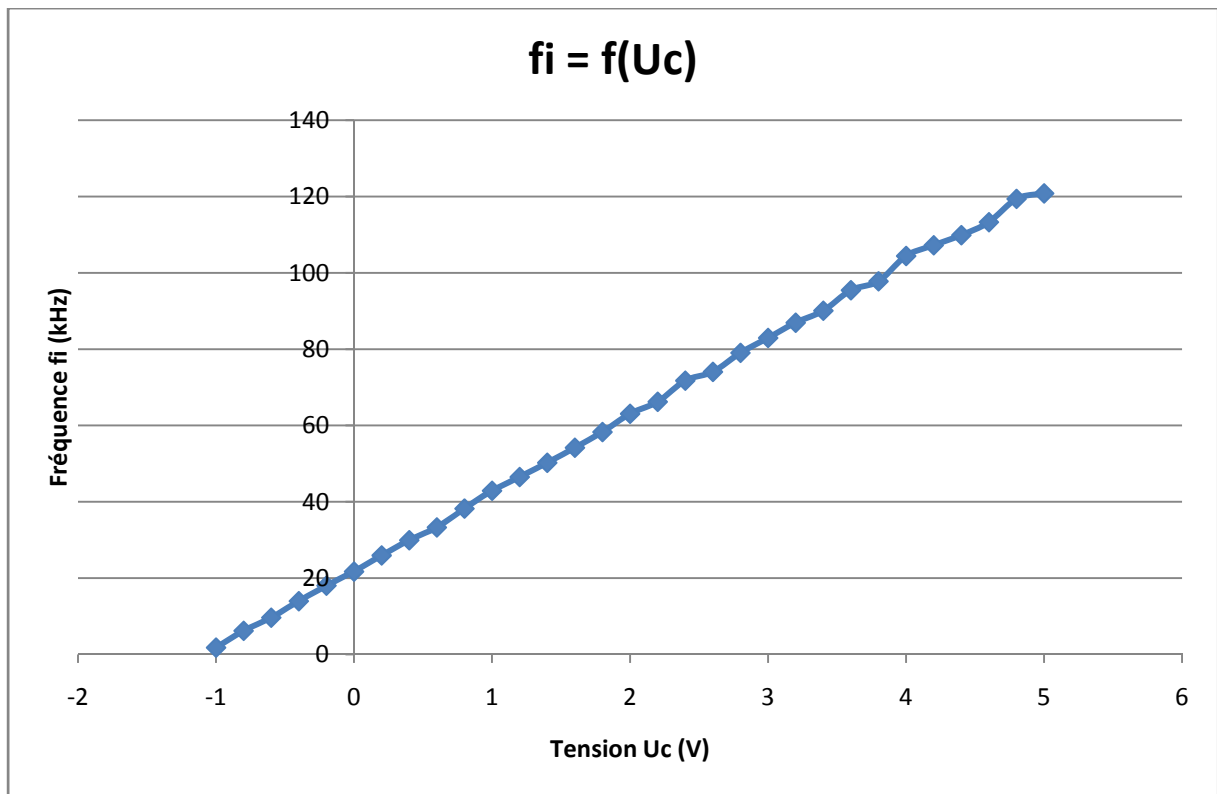
La constante  $k_f$  s'exprime en  $\text{Hz} \cdot \text{V}^{-1}$ .

### 2.2 Détermination de $k_f$ :

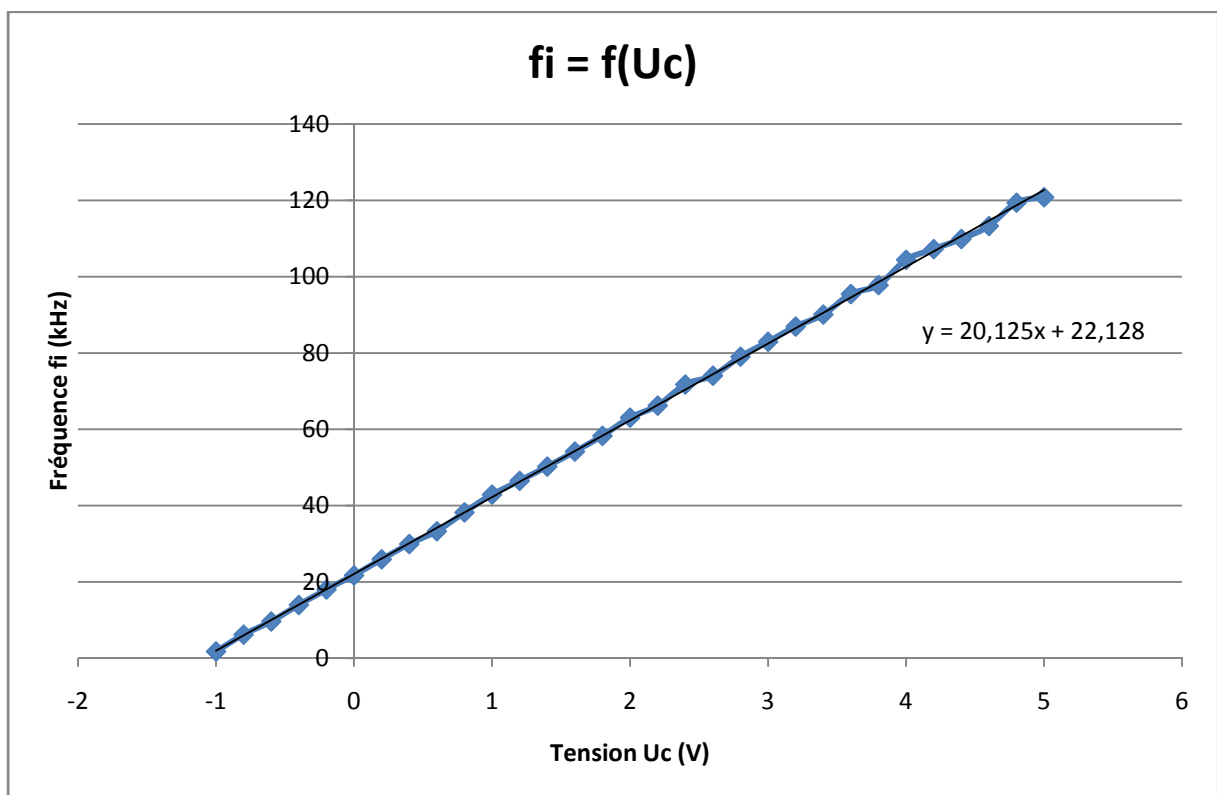
Tension $U_c$	Fréquence de sortie $f_i$
-1	1,8

-0,8	6,211
-0,6	9,662
-0,4	13,986
-0,2	18,05
0	21,74
0,2	25,97
0,4	29,96
0,6	33,3
0,8	38,24
1	42,92
1,2	46,51
1,4	50,25
1,6	54,2
1,8	58,31
2	63,09
2,2	66,23
2,4	71,77
2,6	74,07
2,8	79,05
3	82,96
3,2	86,96
3,4	90,09
3,6	95,465
3,8	97,8
4	104,44
4,2	107,24
4,4	109,89
4,6	113,31
4,8	119,4
5	120,85

Nous obtenons alors le graphique suivant :



Nous pouvons donc déterminer les coefficients  $k_f$  et  $f_p$ , en construisant une courbe de tendance de la forme  $f(x) = ax + b$ . Nous obtenons la courbe suivante :



L'équation de la courbe de tendance est alors la suivante :

$$y = 20,125 \cdot x + 22,128$$

Nous pouvons donc en déduire :

$$k_f = 20,125 \text{ kHz} \cdot \text{V}^{-1}$$

$$f_p = 22,128 \text{ kHz}$$

Nous pouvons considérer que ces résultats sont corrects aux erreurs de mesures près.

### 3 Etude des variations de la fréquence instantanée :

Nous savons que :

$$f(t) = f_p + k_f \cdot x(t)$$

#### 3.1 Cas d'un signal modulé par un signal en dent de scie :

Le signal modulé par un signal en dent de scie est le suivant :

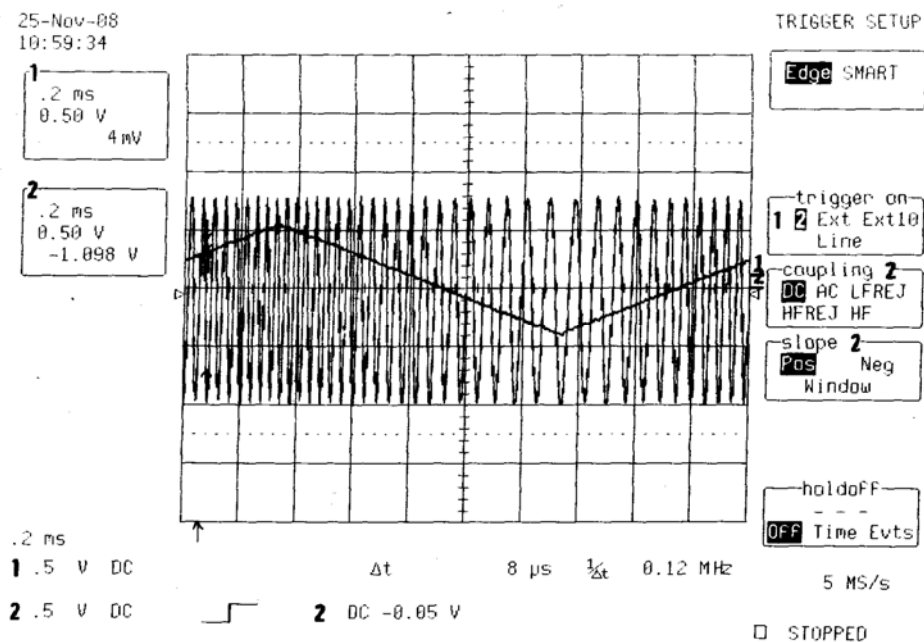


Figure 7 : Signal modulé par un signal dent de scie

Nous pouvons noter que le signal modulé varie entre une fréquence de 11,8 kHz et 31,6 kHz. Le signal modulé étant régi par l'équation ci-dessus, nous avons :

$$f(t) = f_p + k_f \cdot tri(t)$$

Nous savons que  $tri(t)$  varie linéairement, donc entre un minimum et un maximum, nous pouvons en déduire que la fréquence du signal modulé croît linéairement. En revanche, entre un minimum et un maximum, la fréquence du signal modulé décroît linéairement.

#### 3.2 Cas du signal modulé par un signal sinus :

Le signal modulé par un signal sinusoïdal est le suivant :



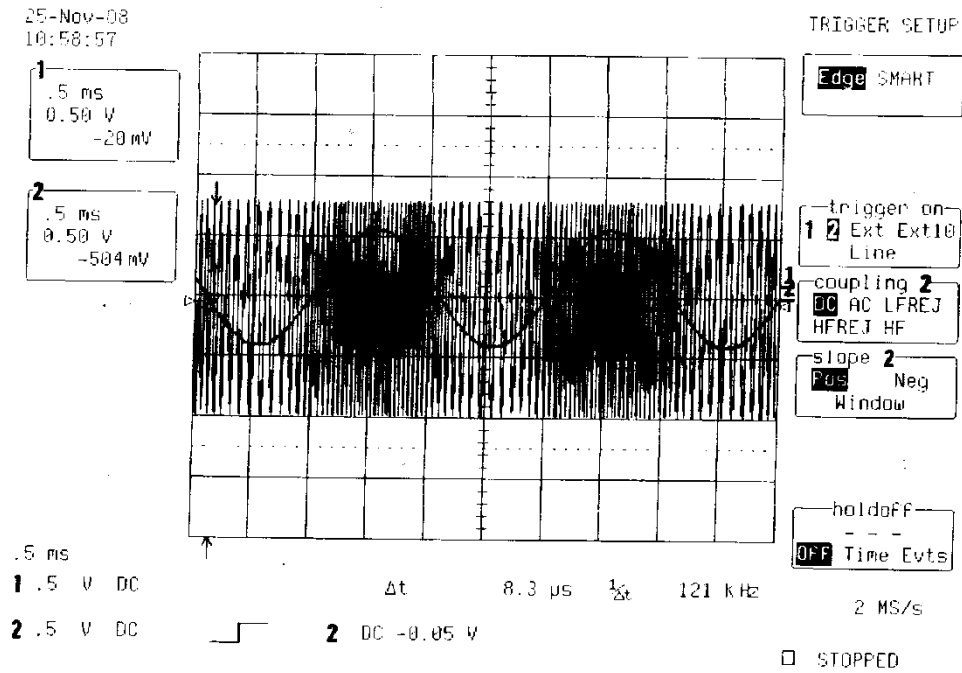


Figure 8 : Signal modulé par un signal sinusoïdal

Comme dans les cas précédents, la fréquence du signal modulé est comprise entre 11,8 kHz et 31,6 kHz. Le signal modulé étant régi par l'équation ci-dessus, nous avons :

$$f(t) = f_p + k_f \cdot \sin(t)$$

Nous pouvons en déduire que la fréquence du signal modulé varie sinusoïdalement par rapport à l'amplitude du signal sinusoïdale.

### 3.3 Cas d'un signal modulé par un signal créneau :

Le signal modulé avec un signal créneau est le suivant :

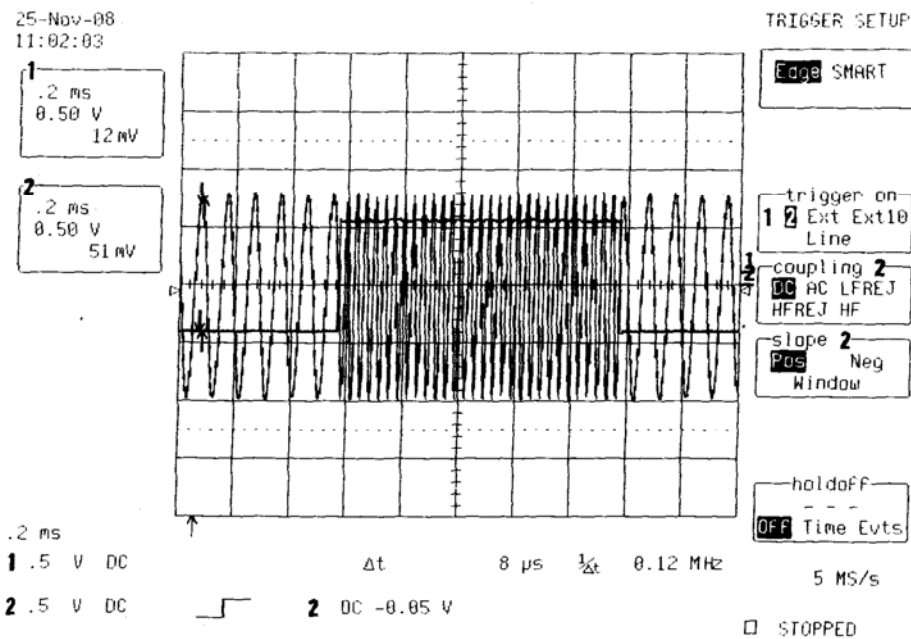


Figure 9 : Signal modulé par un signal créneau

Nous pouvons noter que le signal modulé varie entre une fréquence de 11,8 kHz et 31,6 kHz. Le signal modulé étant régi par l'équation ci-dessus, nous avons :

$$f(t) = f_p + k_f \cdot \text{sqr}(t)$$

Nous n'avons que deux fréquences possibles correspondant aux deux valeurs d'amplitudes du signal créneau étant -500 mV et 500 mV. Ainsi, lorsque l'amplitude du signal créneau vaut -500 mV, la fréquence du signal modulé vaut 11,8 kHz. Lorsque l'amplitude du signal créneau vaut 500 mV, la fréquence du signal vaut 31,6 kHz.

Nous pouvons déterminer le coefficient  $k_f$  à partir de l'équation précédente puisque nous connaissons la valeur  $f_p$ ,  $f(t)$ , et  $\text{sqr}(t)$ .

Dans le cas où l'amplitude vaut 500 mV, nous avons alors :

$$k_{f1} = \frac{f(t) - f_p}{\text{sqr}(t)} = \frac{32,6 - 20}{0,5} = 23,4 \text{ kHz} \cdot \text{V}^{-1}$$

Dans le cas où l'amplitude vaut -500 mV, nous avons alors :

$$k_{f2} = \frac{f(t) - f_p}{\text{sqr}(t)} = \frac{11,8 - 20}{-0,5} = 16,4 \text{ kHz} \cdot \text{V}^{-1}$$

Nous faisons la moyenne de ces deux coefficients et nous obtenons alors :

$$k_f = \frac{k_{f1} + k_{f2}}{2} = 19,8 \text{ kHz} \cdot \text{V}^{-1}$$

## 4 Etude du spectre d'un signal modulé en fréquence :

Nous avons la relation :

$$y(t) = U \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \cdot \cos[2\pi(f_p + nf_i)t]$$

La définition de la transformée de Fourier étant :

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

En appliquant dans notre cas nous obtenons :

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} U \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \cdot \cos[2\pi(f_p + nf_i)t] \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Sortons tous les termes ne dépendant pas de  $t$  :

$$Y(f) = U \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[2\pi(f_p + nf_i)t] \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Nous savons que :

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$$

Nous avons alors :

$$Y(f) = U \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(e^{j2\pi(f_p+nf_i)t} + e^{-j2\pi(f_p+nf_i)t}) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

En sortant simplifiant les exponentielles, nous obtenons :

$$Y(f) = \frac{U}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f_p+nf_i)t} \cdot e^{-j2\pi ft} + e^{-j2\pi(f_p+nf_i)t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$Y(f) = \frac{U}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f_p+nf_i)t} \cdot e^{-j2\pi ft} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(-f_p-nf_i)t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Par propriété, nous savons que :

$$e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{F} \delta(f - f_0)$$

D'où :

$$Y(f) = \frac{U}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) [\delta(f - (f_p + n f_i)) + \delta(f - (-f_p - n f_i))]$$

La transformée de Fourier de l'équation (5) est donc :

$$Y(f) = \frac{U}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) [\delta(f - f_p - n f_i) + \delta(f + f_p + n f_i)]$$

Nous avons alors relevé les spectres pour différents indices de modulation :

#### 4.1 Cas pour m = 1 :

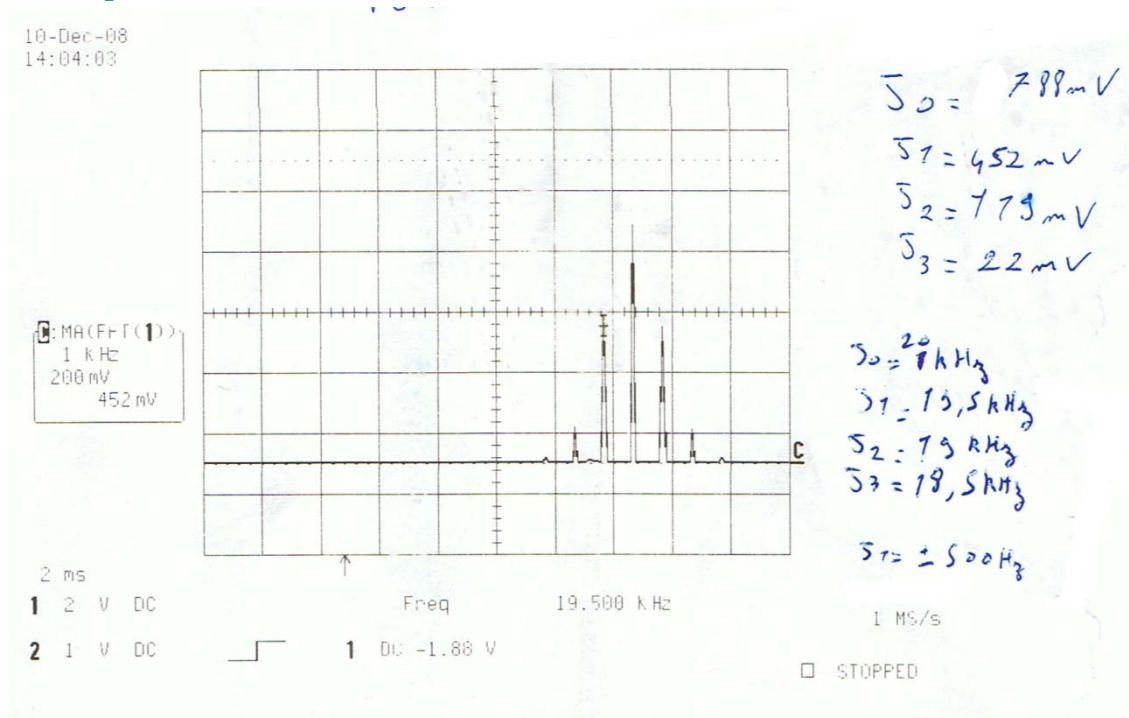


Figure 10 : Spectre avec un coefficient de modulation égal à 1

Pour un coefficient  $m = 1.00$ , nous devons avoir 4 raies selon le tableau des fonctions de Bessel. Dans le tableau suivant nous allons noter l'amplitude théorique que devrait prendre chaque raie :

Valeur de $J_n$	Valeur de l'amplitude de la raie (mV)
0.77	770
0.44	440
0.11	110
0.02	20

Nous pouvons donc affirmer que les résultats expérimentaux correspondent aux résultats théoriques.

## 4.2 Cas pour $m = 2,4$ :



Figure 11 : Spectre avec un coefficient de modulation égal à 2,4

Pour un coefficient  $m = 2.40$ , nous devons avoir 6 raies selon le tableau des fonctions de Bessel. Dans le tableau suivant nous allons noter l'amplitude théorique que devrait prendre chaque raie :

Valeur de $J_n$	Valeur de l'amplitude de la raie (mV)
-0.05	50
0.50	500
0.45	450
0.22	220
0.07	70
0.02	20

Nous pouvons donc affirmer que les résultats expérimentaux correspondent aux résultats théoriques.

### 4.3 Cas pour $m = 4$ :

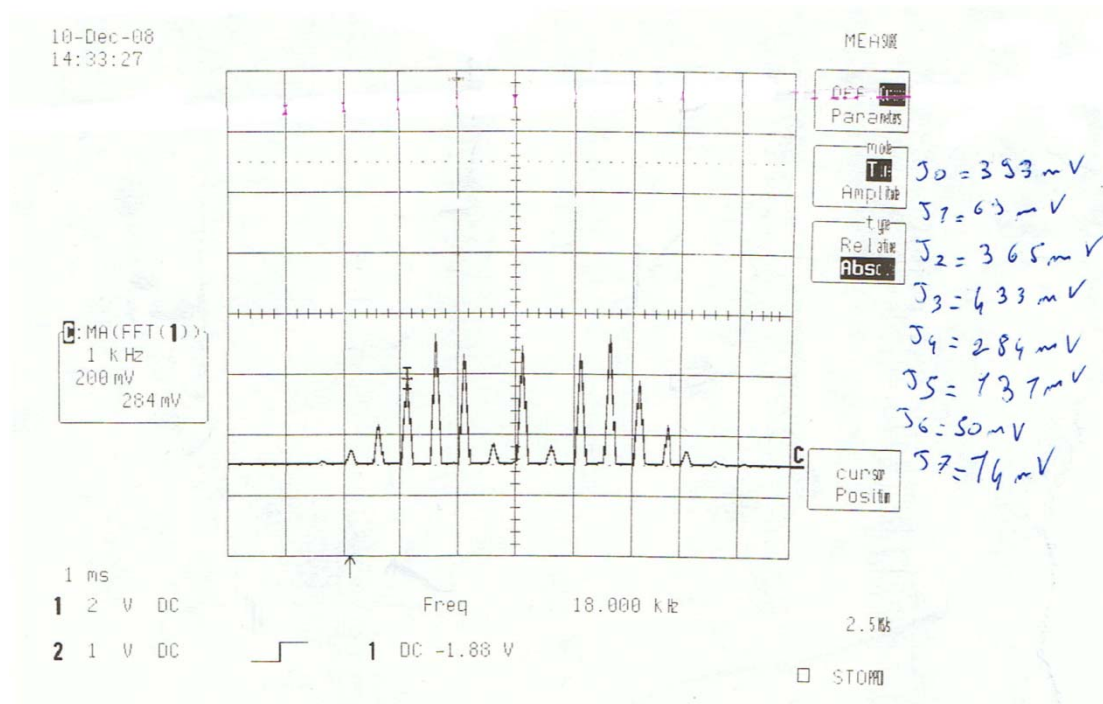


Figure 12 : Spectre avec un coefficient de modulation égal à 4

Pour un coefficient  $m = 4$ , nous devons avoir 8 raies selon le tableau des fonctions de Bessel. Dans le tableau suivant nous allons noter l'amplitude théorique que devrait prendre chaque raie :

Valeur de $J_n$	Valeur de l'amplitude de la raie (mV)
-0.40	-400
-0.07	-70
0.36	360
0.43	430
0.28	280
0.13	130
0.05	50
0.02	20

Nous pouvons donc affirmer que les résultats expérimentaux correspondent aux résultats théoriques.